Física Teórica 3 — 2do. cuatrimestre de 2013

Primer parcial (the real thing)

1. **Proceso de Poisson.** La variable estocástica $N(t)$ mide el número de eventos registrados entre $t = 0$ y t; por ejemplo, el número de partículas detectadas por un contador entre 0 y t. Se asume que la probabilidad de registrar un evento entre t y $t + dt$ es $\nu(t)dt$, independientemente del número de eventos registrados hasta tiempo t; la probabilidad de más de un registro es de orden dt^2. Sea $p_n(t)$ la probabilidad de que hayan ocurrido n registros hasta tiempo t.

   a) Escriba la ecuación maestra para $p_n(t)$.

   b) Muestre explícitamente que la probabilidad total se conserva, $d\big[\sum_n p_n(t)\big]/dt = 0$.

   La ecuación maestra puede resolverse mediante la función generatriz $F(z,t) = \sum_n p_n(t)z^n$.

   c) Escriba la ecuación que satisface $F(z,t)$.

   d) Si el registro se inicia en $t = 0$, con $p_0(0) = 1$, escriba la condición inicial $F(z,0)$ y encuentre $F(z,t)$ para $t \geq 0$.

   e) Desarrollando $F(z,t)$ en potencias de z, calcule $p_n(t)$.

   f) Calcule $\langle n(t)\rangle$ y $\langle n(t)^2\rangle - \langle n(t)\rangle^2$.

   g) (Opcional I.) Particularice los resultados e) y f) al caso $\nu(t)$ constante (proceso homogéneo).

   h) (Opcional II.) Escriba la probabilidad condicional $p(n_2,t_2|n_1,t_1)$ de tener n_2 registros a tiempo t_2 si había n_1 en $t_1 < t_2$.

2. Un gas ideal clásico está formado por N partículas atrapadas en un potencial armónico isótropo, $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2$. Las partículas tienen masa m. Se pide encontrar, usando cualquiera de los ensambles:

   (a) La energía interna, $U(T,N)$.

   (b) La entropía, $S(T,N)$ y $S(U,N)$.

   (c) El valor medio de r^2 para una partícula del gas, $\langle r^2\rangle\,(T)$.

3. Una superficie adsorbente está en contacto con un reservorio de partículas indistinguibles a temperatura T y fugacidad z. La superficie tiene N_0 sitios distinguibles e independientes, cada uno de los cuales puede adsorber una partícula. A su vez, cada partícula adsorbida puede ocupar dos estados, con energías $-\epsilon_1$ y $-\epsilon_2$, respectivamente.

   (a) Escriba la función de partición del sistema en el ensamble gran canónico.

   (b) Suponiendo que hay en promedio n sitios ocupados, calcule z como función de T y de n.

   (c) Calcule la energía media del sistema como función de T y de n.

   (d) Encuentre, como función de T y de n, la fracción de las partículas adsorbidas que está en cada estado.

Preguntas teóricas

1. Justifique la ecuación de Van der Waals.
2. ¿Cuándo vale la extensividad de la Entropía en un sistema?
3. ¿Cuál es la condición de equilibrio para un sistema a S, N y V constantes?
4. ¿Cuál es la condición de equilibrio de acuerdo con la ecuación de Boltzmann?
5. ¿Qué es la Paradoja de Gibbs y qué consecuencias tiene en la formulación de la teoría de ensambles?
6. Ensamble canónico: justifique.
7. ¿Cómo son las fluctuaciones de energía en el gran canónico?
8. Matriz de adyacencia y distinguibilidad de grafos rotulados.