Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2014 – Primer parcial

- Problemas en hojas separadas.
- Las preguntas teóricas cuentan como un problema.
- Lea los enunciados más de una vez. Asegúrese de resolver el problema que se le pide.
- Por favor, use letra clara y sea breve.
- Escriba en limpio los pasos esenciales de los cálculos. El resto puede entregarse como borrador.

1. Una caja de volumen V está dividida en dos partes por una pared. Una de las partes tiene volumen V_1 y la otra V_2. La pared tiene un orificio que comunica los dos volúmenes. Dentro de la caja hay N partículas independientes que pueden pasar a través del orificio de un lado al otro de la caja. La probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula **determinada** que está en el volumen 1 pase al volumen 2 es λ_1, y la probabilidad por unidad de tiempo de que estando en el volumen 2 pase al 1 es λ_2. Sea $p_n(t)$ la probabilidad de que haya n partículas en el volumen 1 a tiempo t.

   a) Escriba la ecuación maestra para $p_n(t)$.

   b) Muestre explícitamente que la probabilidad total se conserva, $d\big[\sum_n p_n(t)\big]/dt = 0$.

   c) Escriba la ecuación que satisface la función generatriz $F(t, z)$.

   Las soluciones pueden escribirse como

   $$F(t,z) = (\alpha + z)^N \; f\left[\frac{1-z}{\alpha+z}\, e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right],$$

   donde $\alpha = \lambda_1/\lambda_2$ y f es una función a determinar por las condiciones iniciales.

   d) En general, ¿cuánto debe valer $f(0)$?

   e) Muestre que la distribución tiende a una distribución estacionaria cuando $t \to \infty$, con independencia de las condiciones iniciales, y escriba p_n en ese límite.

   f) Si la condición inicial es tal que a $t = 0$ el número medio de partículas en 1 es n_0, ¿cuánto debe valer $f'(0)$? Con este resultado calcule el valor medio de n como función del tiempo para $t \geq 0$.

   g) En el equilibrio, ¿cuántas partículas hay en promedio a cada lado de la pared?

   h) A partir del resultado anterior y usando un mínimo de intuición física, ¿cuánto debe valer el cociente λ_1/λ_2?

   i) (Opcional.) Si todo el sistema está a temperatura T, encuentre, independientemente del problema de Markov, sólo con argumentos de teoría cinética, el cociente λ_1/λ_2.

   j) (Opcional.) Si la caja contiene aire a 300 K, si $V = 1$ m^3 y $V_1 = V_2$, si V_1 inicialmente está vacío y si, además, el orificio en la pared fue hecho con un alfiler: **estime** el tiempo que tarda en llegarse al equilibrio. ¿Importa conocer N?

2. Un gas ideal clásico está formado por partículas de masa m. Además de la energía de traslación, las partículas tienen dos niveles de energía: un nivel con degeneración n_0 y energía 0, y otro con degeneración n_1 y energía ϵ. Encuentre en cuánto se modifican las siguientes cantidades respecto de las del gas ideal sin grados de libertad internos:

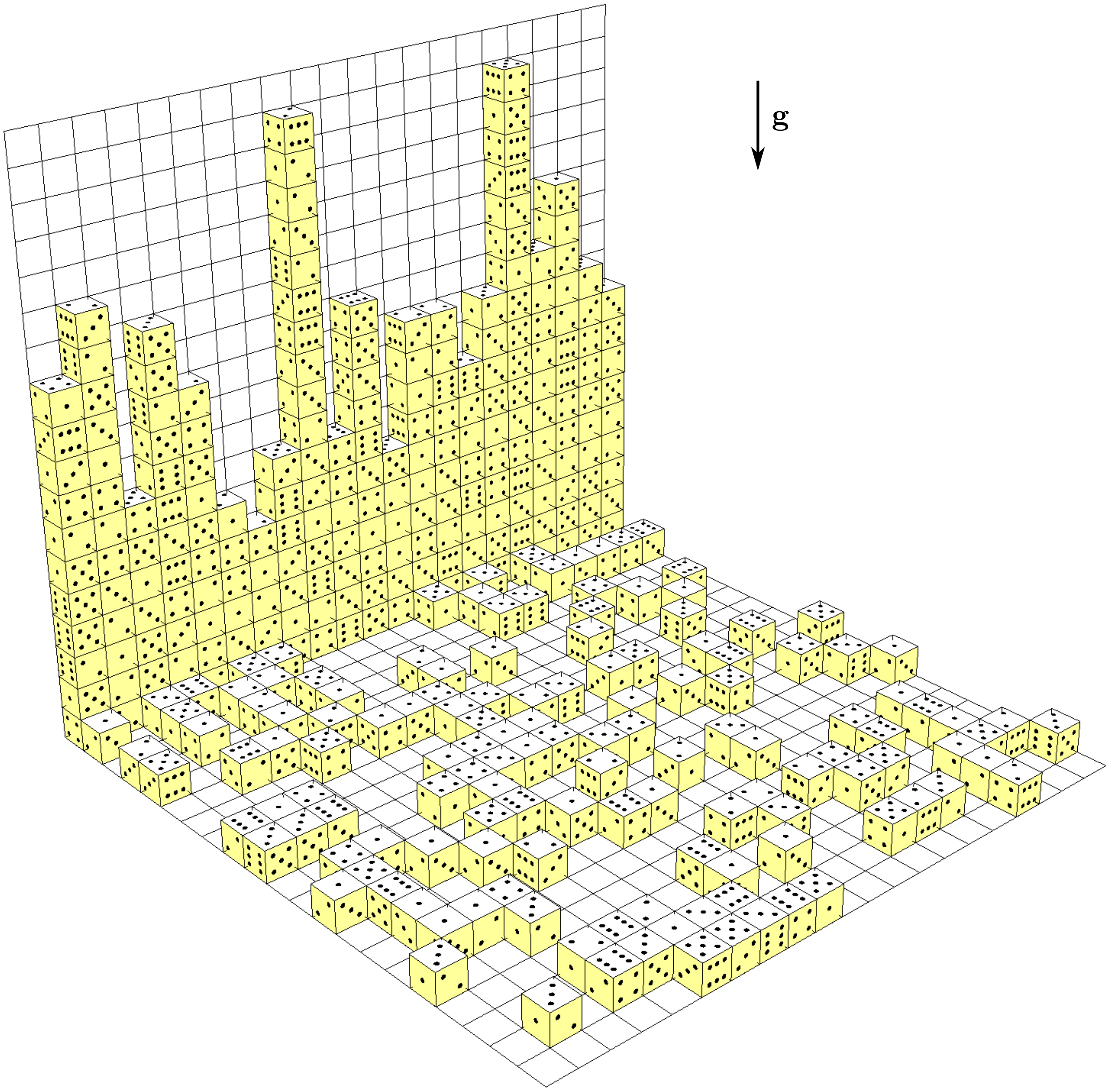
   a) La entropía, b) La energía interna, c) El calor específico a volumen constante, d) La ecuación de estado $p(V, N, T)$.

3. Sobre un semiplano se dibuja una cuadrícula uniforme de lado a. El semiplano está cubierto por un número **variable** de pequeños dados cúbicos indistinguibles de lado a, cuyas caras están numeradas del 1 al 6. Los dados sólo pueden ocupar las casillas de la cuadrícula y a lo sumo hay un dado por casilla. La temperatura es T. No hay energía cinética.

   (a) Considere una región del semiplano con N casillas y encuentre la fugacidad de los dados en función de la fracción de casillas ocupadas.

   El semiplano está limitado por una pared vertical. Los dados pueden apilarse sobre esta pared formando columnas. La masa de los dados es m y la aceleración de la gravedad es g.

   b) Asumiendo que el número medio de dados por cada columna es muy grande, encuentre la altura media de las columnas en función de la fracción de dados sobre el semiplano. (*Ayuda:* puede ser necesario aproximar una suma por el máximo de sus términos.)



Preguntas teóricas

a) Sea un sistema cuya dinámica está generada por un Hamiltoniano H (considere que el sistema de N partículas se encuentra dentro de una caja con paredes perfectamente reflejantes y planas)

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} v(r_{ij}).$$

Considere el límite $N \to \infty$, $V \to \infty$, $\dfrac{N}{V} \to$ cte.

i) ¿Bajo qué condiciones el sistema puede ser tratado con la Termodinámica usual?

ii) Entonces, ¿cómo justificaría la existencia del equilibrio?

b) ¿Bajo qué condiciones se siente confiado en usar teoría de ensambles para estudiar el equilibrio de sistemas termodinámicos?

c) Teorema de Liouville.

d) Microcanónico y la termodinámica (Entropía, la segunda ley etc.).

e) Ecuación de Van der Waals y la transición de fase líquido-vapor.

f) ¿Qué metodología usaría para calcular los coeficientes del virial para un potencial de interacción tipo Lennard$-$Jones?