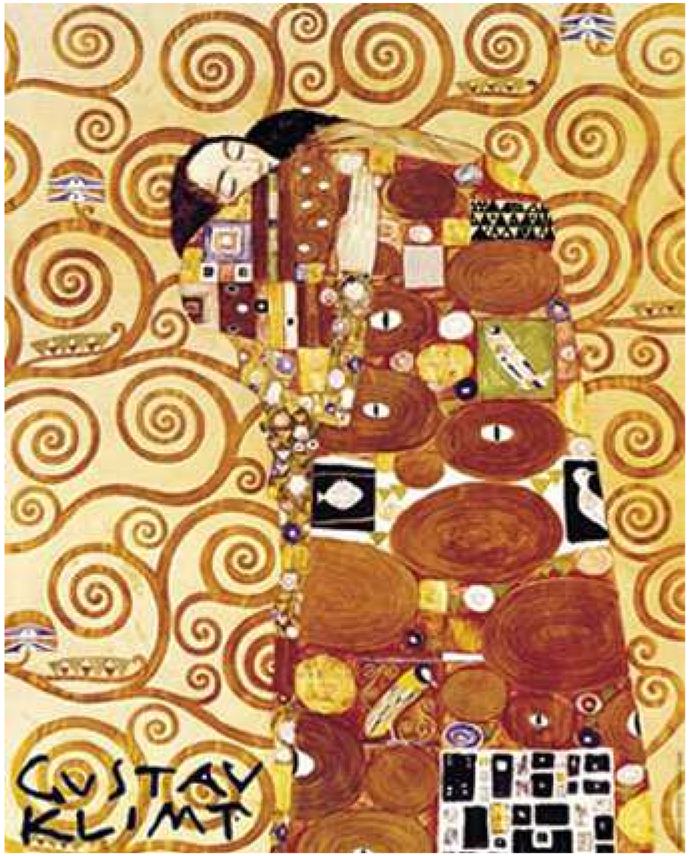
Ising_2



Competencia entre
a) termino de orden $\rightarrow$ interaccion
b) termino de desorden $\rightarrow$ termino externo estocastico

Definido por
a) estados del spin
b) red sobre la que se define el modelo
c) interacciones entre spnes

Ising

$$E_I\{s_i\} = -\varepsilon \sum_{\{ij\}} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

La primer suma se realiza sobre los vecinos inmediatos una suma de este tipo depende de las caracteristicas de la red sobre la que se trabaja.

Sea una red regular

Sea γ el grado de un nodo $\Rightarrow \sum_{\{ij\}} \Rightarrow \gamma N/2$

dimension	tipo	γ
2	cuadrada	4
3	cubica simple	6
3	cubica body-centered	8

La funcion de particion sera :

$$Q_I(H,T) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \ldots \sum_{s_N} \exp(-\beta E_I\{s_i\})$$

Donde los s_i toman los valores ± 1 o sea que hay 2^N terminos.

De aqui

$$A_I(H,T) = -kT \log Q_I(H,T)$$

Para dos dimensiones se demuestra que se puede tener magnetización espontánea

Para demostrar esto se recurría al análisis de dominios

+	+	+	+	+	+	+	+
+	-	-	+	-	-	-	+
+	+	+	-	-	+	-	+
+	+	+	+	+	-	-	+
+	+	-	-	+	-	+	+
+	+	+	+	-	-	+	+
+	-	-	-	+	-	-	+
+	+	+	+	+	+	+	+

Equivalencia de dominios

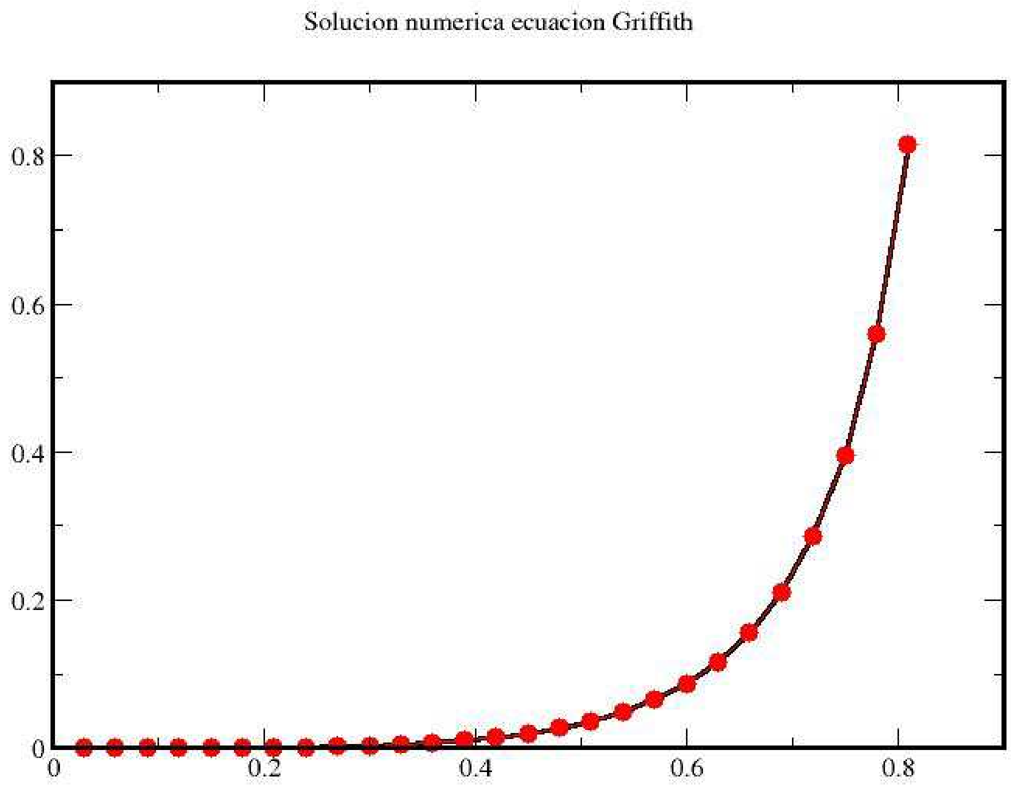
Dos dominios serán iguales si tienen todos sus atributos iguales:

igual “perimetro”
igual “forma”
igual orientación
igual “posicion”

Es decir que al superponer dos redes los dominios iguales se superponen exactamente

Se calculaba N_{-}

$$N_{-} = \sum_{b=4,6,8,..} \sum_{i=1}^{m(b)} \chi(b,i) S_{(b,i)}$$



Solucion numerica ecuacion Griffith
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8

Escribimos esto en terminos de variables convenientes

Sean las siguientes definiciones obvias

N_+ numero total de spin $\uparrow$

N_- numero total de spin $\downarrow$ $= N - N_+$

N_{++} numero de pares $(\uparrow\uparrow)$

N_{--} numero de pares $(\downarrow\downarrow)$

N_{+-} numero de pares $(\uparrow\downarrow)$

Si se toma todo nodo $+$ $\left[\text{"up" o } \uparrow\right]$ y se traza una linea a los vecinos $\longrightarrow$ se trazaran γN_+ lineas

Para cada par $(+\,+)$ corresponden 2 lineas

Para cada par $(+\,-)$ corresponde 1 linea

Entonces

1) $\gamma N_+ = 2N_{++} + N_{+-}$

2) $\gamma N_- = 2N_{--} + N_{+-}$

3) $N_+ + N_- = N$

sumando

4) $\gamma(N_+ + N_-) = 2[N_{++} + N_{+-} + N_{--}]$

Expresando todo en terminos de, por ejemplo, N_{++} , N_+ y N

Expresamos N_{--} , N_- y N_{+-}

de 1) $\gamma N_+ - 2N_{++} = N_{+-}$

de 3) $N_- = -N_+ + N$

de 4) $\gamma N/2 + N_{++} - \gamma N_+ = N_{--}$

Observar que

$$\sum_{\{ij\}} s_i s_j = N_{++} + N_{--} - N_{+-} =$$

$$= N_{++} + [\gamma N/2 + N_{++} - \gamma N_{+}] - [\gamma N_{+} - 2N_{++}]$$

$$= 4N_{++} - 2\gamma N_{+} + \gamma N/2$$

Ademas

$$\sum_i s_i = N_{+} - N_{-} = N_{+} - [-N_{+} + N] = 2N_{+} - N$$

De donde la energia se escribe

$$E_I(N_{++}, N_{+}) = -\varepsilon\{4N_{++} - 2\gamma N_{+} + \gamma N/2\} - H\{2N_{+} - N\}$$

$$= -\varepsilon 4N_{++} + 2(\varepsilon\gamma - H)N_{+} - (\gamma\varepsilon/2 - H)N$$

de donde

$$\exp[-\beta A(H,T)] = \exp[N\beta(\gamma\varepsilon/2 - H)]\left\{\sum_{N_+}^{N}\exp[-2(\varepsilon\gamma - H)]N_+\right\}$$

$$\cdot\left\{\sum_{N_{++}} g(N_+, N_{++})\exp[\beta\varepsilon 4N_{++}]\right\}$$

En el ultimo factor la suma se hace sobre los valores de N_{++} compatibles y $g(N_+, N_{++})$ es la degeneracion de las configuraciones.

Esto no se ha resuelto analiticamente sino para 2dimensiones

Aproximacion de Bragg-Williams

Dadas las configuraciones de Ising, el sistema es descripto en terminos de N_+ y N_{++}

$\frac{N_+}{N}$ esta asociado a la densidad de un cuerpo

$\frac{N_{++}}{N\gamma/2}$ estara asociado a correlaciones de 2 cuerpos.

Podemos pensar $\frac{N_+}{N}$ como asociado a propiedades del sistema en un escala "larga" , vision global de la red.

Por otro lado $\frac{N_{++}}{N\gamma/2}$ esta asociado a correlaciones de rango corto. O sea a propiedades "locales" del sistema.

En terminos de la analogia con ρ y $\rho^{(2)}$ ....

Haciendo la siguiente transformacion:

$$\frac{N_+}{N} \equiv \frac{1}{2}(L+1) \quad \rightarrow \quad -1 \leq L \leq 1$$

$$\frac{N_{++}}{N\gamma/2} \equiv \frac{1}{2}(\sigma+1) \quad \rightarrow \quad -1 \leq \sigma \leq 1$$

de donde

$$N_+ = \frac{N}{2}(L+1)$$

$$N_{++} = \frac{N\gamma}{4}(\sigma+1)$$

Magnetización $\longrightarrow$ $L \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{N_+} \neq N/2$

como la energia es

$$\boxed{E_I\{s_i\} = -\varepsilon \sum_{\{ij\}} s_i s_j - H \sum_i s_i}$$

Recordando que

$$\sum_{\{ij\}} s_i s_j = 4N_{++} - 2\gamma N_+ + \gamma N/2$$

$$\sum_i s_i = 2N_+ - N$$

$$N_+ = \tfrac{N}{2}(L+1)$$

$$N_{++} = \tfrac{N\gamma}{4}(\sigma+1)$$

De esta forma podemos escribir

$$\sum_{\{ij\}} s_i s_j = 4\frac{N\gamma}{4}(\sigma+1) - 2\gamma\frac{N}{2}(L+1) + \gamma N/2$$

$$= N\gamma\sigma + \cancel{N\gamma} - \gamma NL - \cancel{\gamma N} + \gamma N/2$$

$$= N\gamma\sigma - \gamma NL + \gamma N/2 = \boxed{\tfrac{1}{2}N\gamma(2\sigma - 2L + 1)}$$

$$\boxed{\sum_i s_i = 2N_+ - N = N(L+1) - N = NL}$$

Entonces la energia por spin es

$$\boxed{\frac{1}{N}E_I(L,\sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma(2\sigma - 2L + 1) - HL}$$

Hasta aqui todo es exacto.

La aproximacion de Bragg-Williams consiste en

$$\frac{N_{++}}{N\gamma/2} \approx \left(\frac{N_+}{N}\right)^2$$

Que inmediatamente les recuerda ...

De lo cual con

$$\left.\begin{aligned} N_+ &= \tfrac{N}{2}(L+1) \\ N_{++} &= \tfrac{N\gamma}{4}(\sigma+1) \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{1}{2}(L+1)\right]^2 = \frac{1}{2}(\sigma+1) \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(L+1)^2 - 1 = \boxed{\sigma = \frac{1}{2}L^2 + L - \frac{1}{2}}\end{array}\right.$$

Reemplazando en la expresión para la energía

reemplazamos

Teníamos que : $$\frac{1}{N}E_I(L,\sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma(2\sigma - 2L + 1) - HL$$

obtenemos $$\frac{1}{N}E_I(L,\sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma(L^2 + \cancel{2L} \cancel{-1} - \cancel{2L} \cancel{+1}) - HL$$

resulta $$\boxed{\frac{1}{N}E_I(L,\sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma L^2 - HL}$$

Entonces en esta aproximacion resulta para la energia:

$$\boxed{\frac{1}{N}E_I(L,\sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma L^2 - HL}$$

y por lo tanto

$$Q_I^{BG}(H,T) = \sum_{\{s_i\}} \exp\left[\beta N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma L^2 + HL\right)\right]$$

La suma es sobre los $\{s_i\}$ y el sumando solo depende de L y por lo tanto hay que ver el conjunto de $\{s_i\}$ que da un dado L.

Un dado L determina un valor de N_+ $\Rightarrow$ el numero que buscamos es la cantidad de formas de seleccionar N_+ de N o sea $\{N!/[N_+!(N-N_+)!]\},\Rightarrow$

$$\boxed{Q_I^{BG}(H,T) = \sum_{L=-1}^{L=1}\{N!/[N_+!(N-N_+)!]\}\exp\left[\beta N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma L^2 + HL\right)\right]}$$

Tomando en el limite de $N \to \infty$ al termino mas grande de la suma ($\overline{L}$), trabajando con el $\log$ y aplicando la aprox. Stirling$\Rightarrow$

$$\boxed{\log Q_I^{BG}(H,T) = \log\{N!/[N_+!(N-N_+)!]\} + \left[\beta N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma \overline{L}^2 + H\overline{L}\right)\right]}$$

como $N_+ = \frac{N}{2}(L+1)$

$$\log Q_I^{BG}(H,T) = \log\left\{N!/\left[\left(\frac{N}{2}(\overline{L}+1)\right)!\left(\frac{N}{2}(1-\overline{L})\right)!\right]\right\} + \\ + \left[\beta N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma\overline{L}^2 + H\overline{L}\right)\right]$$

De donde

Para el primer termino
de la derecha obtenemos

$$\log\left\{N!/\left[\left(\frac{N}{2}(\overline{L}+1)\right)!\left(\frac{N}{2}(1-\overline{L})\right)!\right]\right\}$$

$$= N\log N - \left[N\left(\frac{L+1}{2}\right)\left\{\log N + \log\left(\frac{L+1}{2}\right)\right\}\right] -$$

$$- \left[N\left(\frac{-L+1}{2}\right)\left\{\log N + \log\left(\frac{-L+1}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= N\log N - N\left(\frac{L+1}{2}\right)\log N - N\left(\frac{L+1}{2}\right)\log\left(\frac{L+1}{2}\right) -$$

$$- N\left(\frac{-L+1}{2}\right)\log N - N\left(\frac{-L+1}{2}\right)\log\left(\frac{-L+1}{2}\right)$$

$$= N\log N \cancel{- N\left(\frac{L+1}{2}\right)\log N - N\left(\frac{-L+1}{2}\right)}\log N -$$

$$- N\left(\frac{L+1}{2}\right)\log\left(\frac{L+1}{2}\right) - N\left(\frac{-L+1}{2}\right)\log\left(\frac{-L+1}{2}\right)$$

Reuniendo términos

$$\boxed{\frac{1}{N}\log Q_I^{BG}(H,T) = -\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right)\log\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right) - \left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right)\log\left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right) + \left[\beta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma\overline{L}^2 + H\overline{L}\right)\right]}$$

Entonces la solucion esta dada por **el máximo, lo calculamos** :

$$\frac{\partial}{\partial\overline{L}}\left[\frac{1}{N}\log Q_I^{BG}(H,T)\right] = \beta(\varepsilon\gamma\overline{L} + H) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$\boxed{= (\varepsilon\gamma\overline{L} + H) - \log\left[\frac{\overline{L}+1}{-\overline{L}+1}\right] = 0}$$

Hay que resolver

$$\boxed{\frac{\overline{L}+1}{-\overline{L}+1} = \exp 2\underbrace{\beta(\varepsilon\gamma\overline{L}+H)}^{x}}$$

de donde recordando que $\boxed{\tanh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)} = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1}}$

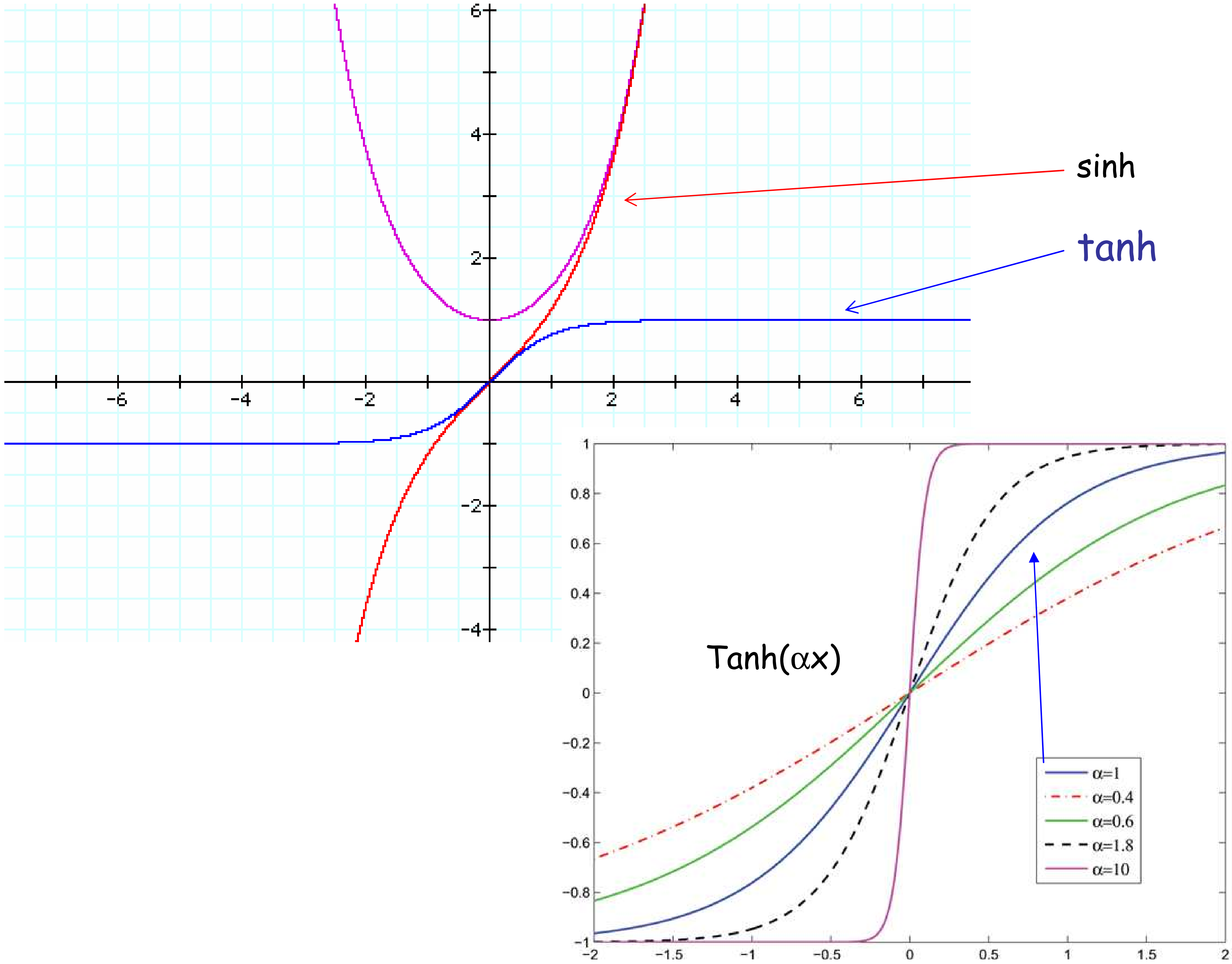
$$\overline{L}+1 = \exp(2x)(-\overline{L}+1) = \exp(2x) - \overline{L}\exp(2x) \Rightarrow$$

$$\boxed{\exp(2x) - \overline{L}\exp(2x) - \overline{L} = 1} \Rightarrow \exp(2x) - \overline{L}(\exp(2x)+1) = 1 \Rightarrow$$

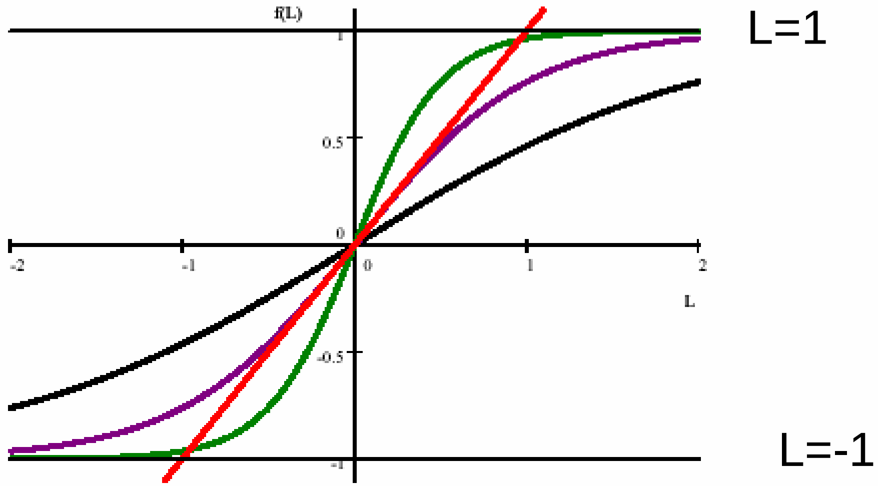
$$\overline{L} = \frac{1-\exp(2x)}{-(\exp(2x)+1)} = \frac{\exp(2x)-1}{\exp(2x)+1} \Rightarrow \overline{L} = \tanh(\beta(\varepsilon\gamma\overline{L}+H))$$

Si $H = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\overline{L} = \tanh(\beta\varepsilon\gamma\overline{L})}$$


sinh
tanh
Tanh(αx)
α=1
α=0.4
α=0.6
α=1.8
α=10

$$N_+ = \frac{N}{2}(L+1)$$



Asi que hay una secuencia de soluciones dependiendo del

valor de $\varepsilon\gamma/kT$ (en el grafico tomamos los valores 0.5 (negro), 1 (violeta), 2 (verde)

Entonces tenemos que las soluciones son

$$N_+ = \frac{N}{2}(L+1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon\gamma/kT < 1 \quad &\rightarrow \quad \overline{L} = 0 \\ \varepsilon\gamma/kT > 1 \quad &\rightarrow \quad \overline{L} = L_0, 0, -L_0 \end{aligned}}$$

Definimos entonces

$$\boxed{\varepsilon\gamma = kT_c}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} T > T_c \quad &\rightarrow \quad \overline{L} = 0 \\ T < T_c \quad &\rightarrow \quad \overline{L} = L_0, 0, -L_0 \end{aligned}}$$

T_c se denomina Temperatura de Curie, para $T < T_c$ el sistema

es ferromagnetico

Atencion

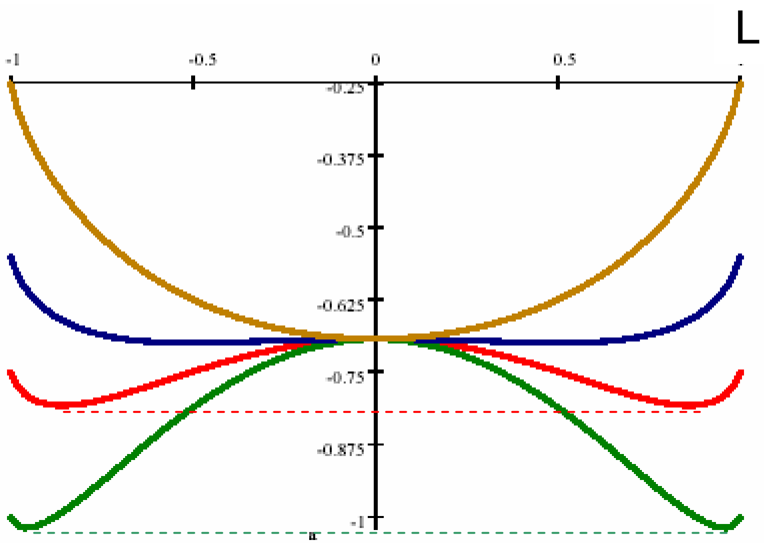
$$\boxed{\frac{1}{N}A_I = \left[-\frac{1}{N}\log Q_I^{BG}(H,T)\right]}$$

con

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\log Q_I^{BG}(H,T) = &-\left(\frac{\bar{L}+1}{2}\right)\log\left(\frac{\bar{L}+1}{2}\right) - \\ &\left(\frac{-\bar{L}+1}{2}\right)\log\left(\frac{-\bar{L}+1}{2}\right) + \\ &+\left[\beta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma\bar{L}^2 + H\bar{L}\right)\right]\end{aligned}$$

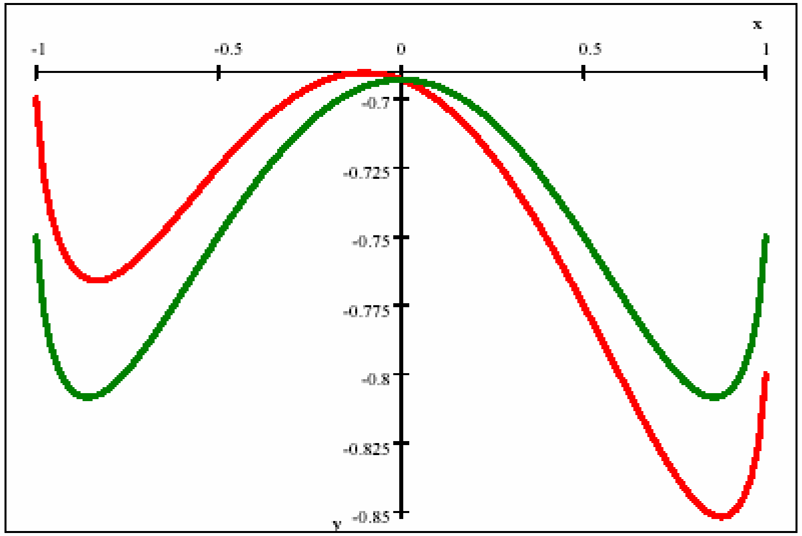
Sea $T < T_c = \varepsilon\gamma/k$; sea $T_c/T = 1.5$ (rojo) , $T_c/T = 2$ (verde) , $T_c/T = 1.1$ (azul) , $T_c/T = 0.9$ (marron)

A(L)



Entonces : Que soluciones tomamos?

Si $H \neq 0$



En rojo con $H \neq 0$ y en verde con $H = 0$

De donde se ve ....

(rotura de la degeneracion!)

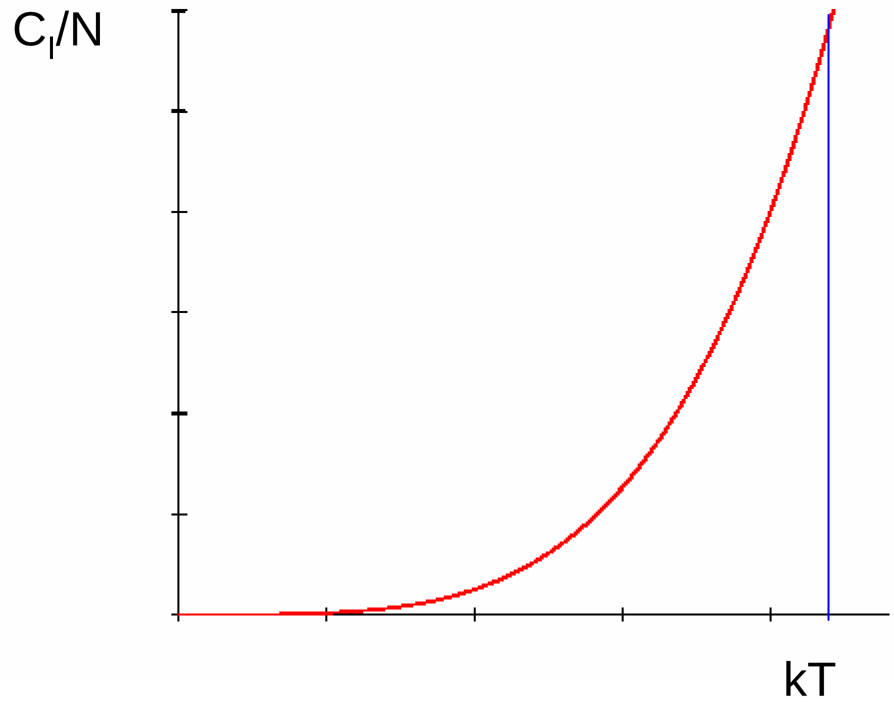
Las correspondientes funciones termodinamicas son :

a) A segun la ecuacion anterior con $L_0 = 0$ para $T > T_c$ ....

b) $\frac{1}{N} M_I(0,T) = \begin{array}{cc} 0 & T > T_c \\ L_0 & T < T_c \end{array}$

c) $\frac{1}{N} U_I(0,T) = \begin{array}{cc} 0 & T > T_c \\ -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma L_0^2 & T < T_c \end{array}$

d) $\frac{1}{N} C_I(0,T) = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma \frac{d}{dT} L_0^2 & T < T_c \end{cases}$



Pico en C

En suma, hicimos

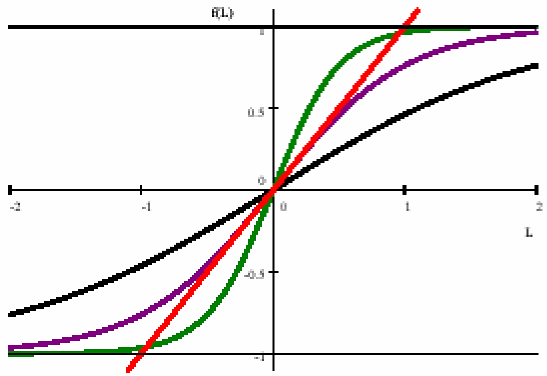
$$\frac{N_+}{N} \equiv \frac{1}{2}(L+1) \quad \rightarrow \quad -1 \le L \le 1$$
$$\frac{N_{++}}{N\gamma/2} \equiv \frac{1}{2}(\sigma+1) \quad \rightarrow \quad -1 \le \sigma \le 1$$

aproximamos

$$\frac{N_{++}}{N\gamma/2} \approx \left(\frac{N_+}{N}\right)^2$$

obtenemos

$$\overline{L} = \tanh(\beta\varepsilon\gamma\overline{L})$$

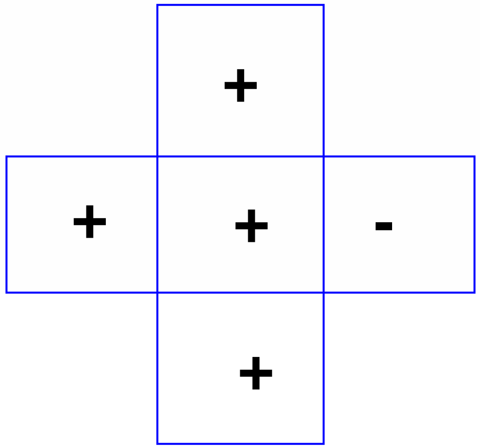


Bethe-Peierls

a) mejora a Bragg-Williams (como veremos...)

b) Se trata de representar apropiadamente el efecto del conjuto de la lattice sobre un "elemento fundamental" del mismo

esto ultimo es algo asi como:



Sea $H = 0$
Sea una celda fundamental
Sea s el spin central
Sea $P(s,n)$ la probabilidad de ...

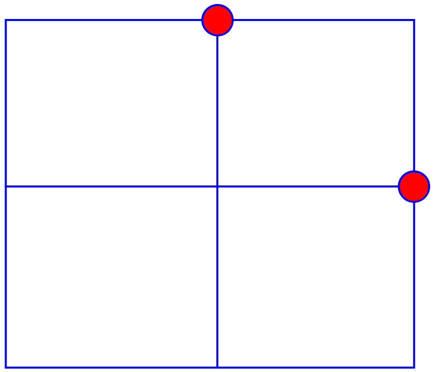
				Numero de
$P(+1,n) \Rightarrow$	s	spin central	$+$	
	n	vecinos	$+$	pares $++$
	$(\gamma - n)$	vecinos	$-$	pares $+-$
$P(-1,n) \Rightarrow$	s	spin central	$-$	
	n	vecinos	$+$	pares $+-$
	$(\gamma - n)$	vecinos	$-$	pares $--$

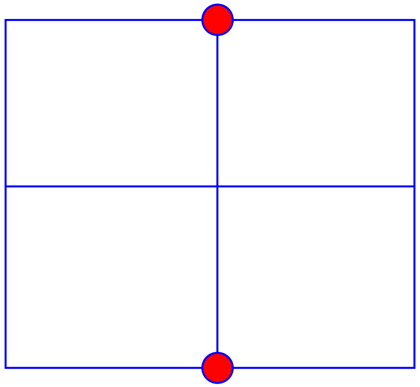
Para una dada topologia y un dado numero n habra $\binom{\gamma}{n}$ posibles ordenamientos luego

$\varepsilon(n-(\gamma-n))$

proponemos

$$P(+1,n) = \frac{1}{q}\binom{\gamma}{n}\exp[\beta\varepsilon(n + (-\gamma + n))]z^n$$
$$= \frac{1}{q}\binom{\gamma}{n}\exp[\beta\varepsilon(2n - \gamma)]z^n$$





X 4 X 2 $\rightarrow$ total=6

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$$

donde

q es una normalizacion

z^n es una "fugacidad" que representa al resto de los spines en su efecto sobre la cantidad de spines "+" ...

Del mismo modo

$$\begin{aligned} P(-1,n) &= \tfrac{1}{q}\binom{\gamma}{n}\exp[\beta\varepsilon(-n+(\gamma-n))]z^n \\ &= \tfrac{1}{q}\binom{\gamma}{n}\exp[-\beta\varepsilon(2n-\gamma)]z^n \end{aligned}$$

Como toda normalizacion se determina por

$$\sum_{n=0}^{\gamma}[P(+1,n)+P(-1,n)] = 1$$

De donde

$$q = \sum_{n=0}^{\gamma}\binom{\gamma}{n}\left[(ze^{2\beta\varepsilon})^n e^{-\beta\varepsilon\gamma} + (ze^{-2\beta\varepsilon})^n e^{\beta\varepsilon\gamma}\right]$$

Arreglado las cosas para obtener el binomio $\rightarrow$ $y^n x^\gamma = y^n x^\gamma x^{-n} x^n = (yx)^n x^{\gamma-n}$

$$\sum_{n=0}^{\gamma}\binom{\gamma}{n}(ze^{2\beta\varepsilon})^n e^{-\beta\varepsilon\gamma} = \sum_{n=0}^{\gamma}\binom{\gamma}{n} y^n x^\gamma = (x+xy)^\gamma \quad \rightarrow$$

$$[e^{-\beta\varepsilon} + ze^{2\beta\varepsilon}e^{-\beta\varepsilon}]^\gamma = [e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}]^\gamma$$

$$\begin{cases} y = (ze^{2\beta\varepsilon}) \\ x = (e^{-\beta\varepsilon}) \end{cases}$$

Entonces resulta

$$q = [e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}]^\gamma + [e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon}]^\gamma$$

con

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

Tomando en cuenta las definiciones de L y σ

$\frac{N_+}{N} \equiv \frac{1}{2}(L+1)$ y $\frac{N_{++}}{N\gamma/2} \equiv \frac{1}{2}(\sigma+1)$

$$\boxed{\frac{N_+}{N} = \sum_{n=0}^{\gamma} P(+1,n) = \frac{1}{q}[e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}]^{\gamma} = \frac{1}{2}(L+1)}$$

pues es la proba de tener un + en un dado "nodo"

$$\boxed{\frac{N_{++}}{N\gamma/2} = \frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\gamma} nP(+1,n)}$$

pues es el numero medio de pares "++"

para resolver esto ultimo

$$\frac{N_{++}}{N\gamma/2} = \sum_{n=0}^{\gamma}\binom{\gamma}{n} ny^{n}x^{\gamma} = y\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{\gamma}\binom{\gamma}{n} y^{n}x^{\gamma} = y\frac{\partial}{\partial y}(x+xy)^{\gamma} =$$

$$= xy\gamma\left(x(1+y)\right)^{\gamma-1}$$

Con

$x = \exp(-\beta\varepsilon)$,

$y = z\exp(2\beta\varepsilon)$

Entonces $\longrightarrow$

$$xy\left(x+xy\right)^{\gamma-1}=e^{(-\beta\varepsilon)}ze^{(2\beta\varepsilon)}\left(e^{(-\beta\varepsilon)}+ze^{(\beta\varepsilon)}\right)^{\gamma-1}=\frac{N_{++}}{N\gamma/2}=$$

entonces

$$\boxed{=ze^{\beta\varepsilon}\left(e^{-\beta\varepsilon}+ze^{\beta\varepsilon}\right)^{\gamma-1}=\frac{1}{2}(\sigma+1)}$$

De donde σ y L quedan expresados en terminos de z y T y esto es entonces la aproximacion de Bethe-Peierls

La interpretacion de $\frac{N_+}{N}=\sum_{n=0}^{\gamma}P(+1,n)$ es la proba de encontrar en spin "+" en el centro

Sea ahora $\frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\gamma}n[P(+1,n)+P(-1,n)]$ que es la proba de que un vecino sea "+" independiente del valor del spin en el **centro**

Pero un "centro" es indistinguible de un "vecino", luego

$$\sum_{n=0}^{\gamma} P(+1,n) = \frac{1}{\gamma}\sum_{n=0}^{\gamma} n[P(+1,n)+P(-1,n)]$$

Recordando que por ejemplo

$$n[P(+1,n)] = z\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{q}\binom{\gamma}{n}\exp[\beta\varepsilon(2n-\gamma)]z^n$$

Entonces quedara, reemplazando las sumas por lo que ya calculamos (slides 38 y 39)

$$\left\{\begin{aligned} P(+1,n) &= \tfrac{1}{q}\binom{\gamma}{n}\exp[\beta\varepsilon(n+(-\gamma+n))]z^n \\ &= \tfrac{1}{q}\binom{\gamma}{n}\exp[\beta\varepsilon(2n-\gamma)]z^n \end{aligned}\right.$$

$$\frac{N_+}{N} = \sum_{n=0}^{\gamma} P(+1,n) = \tfrac{1}{q}[e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}]^{\gamma} = \tfrac{1}{2}(L+1)$$

$$\begin{aligned} [e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}]^{\gamma} &= \frac{z}{\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\{[e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}]^{\gamma} + [e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon}]^{\gamma}\} \\ &= z\left\{[e^{-\beta\varepsilon} + ze^{\beta\varepsilon}]^{\gamma-1}e^{\beta\varepsilon} + [e^{\beta\varepsilon} + ze^{-\beta\varepsilon}]^{\gamma-1}e^{-\beta\varepsilon}\right\} \end{aligned}$$

de donde trivialmente

$$\boxed{z = \left[\frac{1 + z\exp(2\beta\varepsilon)}{z + \exp(2\beta\varepsilon)}\right]^{\gamma-1}}$$

Para calcular L hacemos

Para calcular L hacemos

$$\boxed{\frac{1}{q}\left[e^{-\beta\varepsilon}+ze^{\beta\varepsilon}\right]^{\gamma}=\frac{1}{2}(L+1)=}$$

$$=\frac{e^{-\beta\varepsilon\gamma}}{q}\left[1+ze^{2\beta\varepsilon}\right]^{\gamma}=\frac{e^{-\beta\varepsilon\gamma}}{q}z^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[z+\exp(2\beta\varepsilon)\right]^{\gamma}=$$

$$=\frac{e^{-\beta\varepsilon\gamma}}{\left[e^{-\beta\varepsilon}+ze^{\beta\varepsilon}\right]^{\gamma}+\left[e^{\beta\varepsilon}+ze^{-\beta\varepsilon}\right]^{\gamma}}z^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[z+\exp(2\beta\varepsilon)\right]^{\gamma}=$$

$$=\frac{1}{\left[1+ze^{2\beta\varepsilon}\right]^{\gamma}+\left[e^{2\beta\varepsilon}+z\right]^{\gamma}}z^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[z+\exp(2\beta\varepsilon)\right]^{\gamma}=$$

$$=\frac{z^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{1+\frac{\left[1+ze^{2\beta\varepsilon}\right]^{\gamma}}{\left[e^{2\beta\varepsilon}+z\right]^{\gamma}}}=\frac{z^{x}}{1+z^{x}}=\frac{1}{2}(L+1)\Rightarrow$$

$$\boxed{L=2\frac{z^{x}}{1+z^{x}}-1=\frac{z^{x}-1}{1+z^{x}}=L}$$

(Usando resultado para z slide anterior)

Entonces tenemos

$$L = 2\frac{z^x}{1+z^x} - 1 = \frac{z^x - 1}{1+z^x} = L$$

Observar que z=1 $\Rightarrow$ L=0

Del mismo modo

$$\sigma = \frac{2z^2}{(1+z\exp(-2\beta\varepsilon))(1+z^x)} - 1$$

De esta forma calculamos la energia en ausencia de campo usando

$$\frac{1}{N}E_I(L,\sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma(2\sigma - 2L + 1)$$

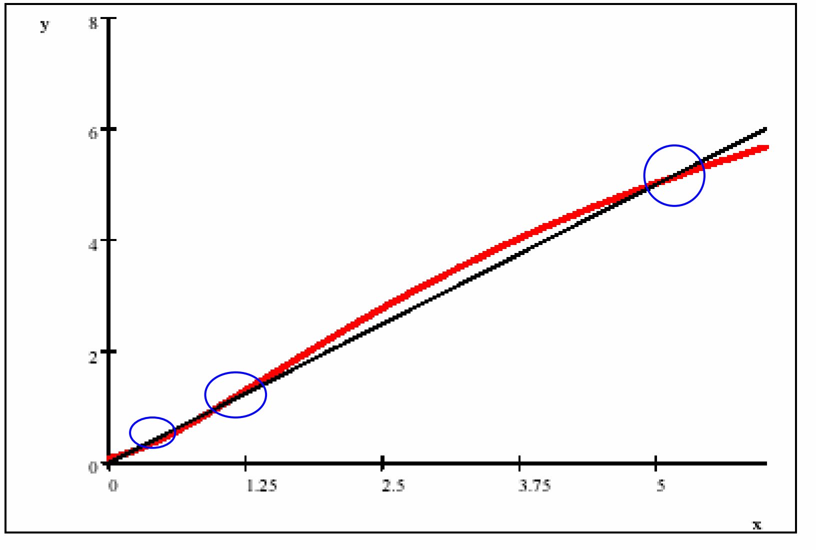
$$\left\{ z = \left[\frac{1 + z\exp(2\beta\varepsilon)}{z + \exp(2\beta\varepsilon)} \right]^{\gamma - 1} \right.$$

Calculamos ahora las soluciones de z

Si fijamos $\gamma = 4$ y jugamos con $2\beta\varepsilon = 2.3$ las soluciones de z

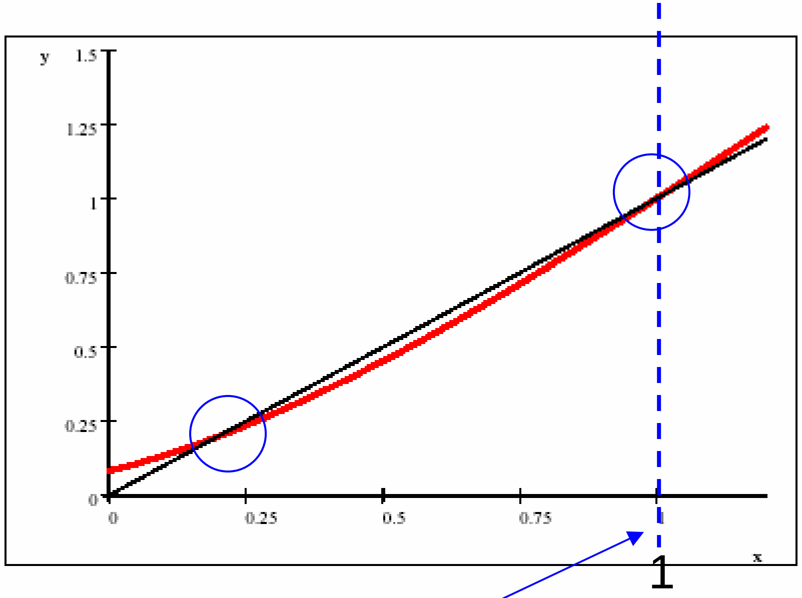
son :

(la variable es z y es fijo)



en la region $0 \leq z \leq 1.25$

$$((1+2.3x)/(x+2.3))^3$$



El termino de la derecha va a exp(2βε (γ-1)) con z muy grande de donde si en 1 tiene pendiente >1 tendra qu "bajar"

Observar que para $z = \left[\frac{1+z\exp(2\beta\varepsilon)}{z+\exp(2\beta\varepsilon)}\right]^{\gamma-1}$

a) $z = 1$ es siempre solucion

b) si z_0 es solucion $1/z_0$ tambien lo es

$$z = \left[\frac{1+z\exp(2\beta\varepsilon)}{z+\exp(2\beta\varepsilon)}\right]^{\gamma-1} \rightarrow \left[\frac{1+\exp(2\beta\varepsilon)/z}{1/z+\exp(2\beta\varepsilon)}\right]^{\gamma-1} = \left[\frac{z+\exp(2\beta\varepsilon)}{1+z\exp(2\beta\varepsilon)}\right]^{\gamma-1} = 1/z$$

c) $z = 1 \rightarrow L = 0$; $z = \infty \rightarrow L = 1$

$$\left\{L = \frac{z^x - 1}{1+z^x}\right\}$$

d) z corresponde a L y $1/z$ corresponde a $-L$

Para definir la Temperatura critica nos fijamos cuando la pendiente de z en $z = 1$ vale 1

En z=1

la pendiente es $\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1+z\exp(2\beta\varepsilon)}{z+\exp(2\beta\varepsilon)}\right]_1^{\gamma-1} = (\gamma - 1)\left[\frac{1+z\exp(2\beta\varepsilon)}{z+\exp(2\beta\varepsilon)}\right]^{\gamma-2} \cdot$

- $\left.\frac{\exp(2\beta\varepsilon)(z+\exp(2\beta\varepsilon))-(1+z\exp(2\beta\varepsilon))}{(z+\exp(2\beta\varepsilon))^2}\right]_1 = (\gamma - 1)\frac{\exp(2\beta\varepsilon)(1+\exp(2\beta\varepsilon))-(1+\exp(2\beta\varepsilon))}{(1+\exp(2\beta\varepsilon))^2} =$

$$\boxed{= (\gamma - 1)\frac{(\exp(2\beta\varepsilon)-1)}{(1+\exp(2\beta\varepsilon))} = c}$$

Z=1

(Hay que calcular la derivada segunda …)

- Si $c < 1$ hay una sola solucion $z = 1 \Rightarrow L = 0$
- Si $c > 1$ hay 3 soluciones pero la de $z = 1$ la dejamos de lado por lo mismo que en Bragg-Williams

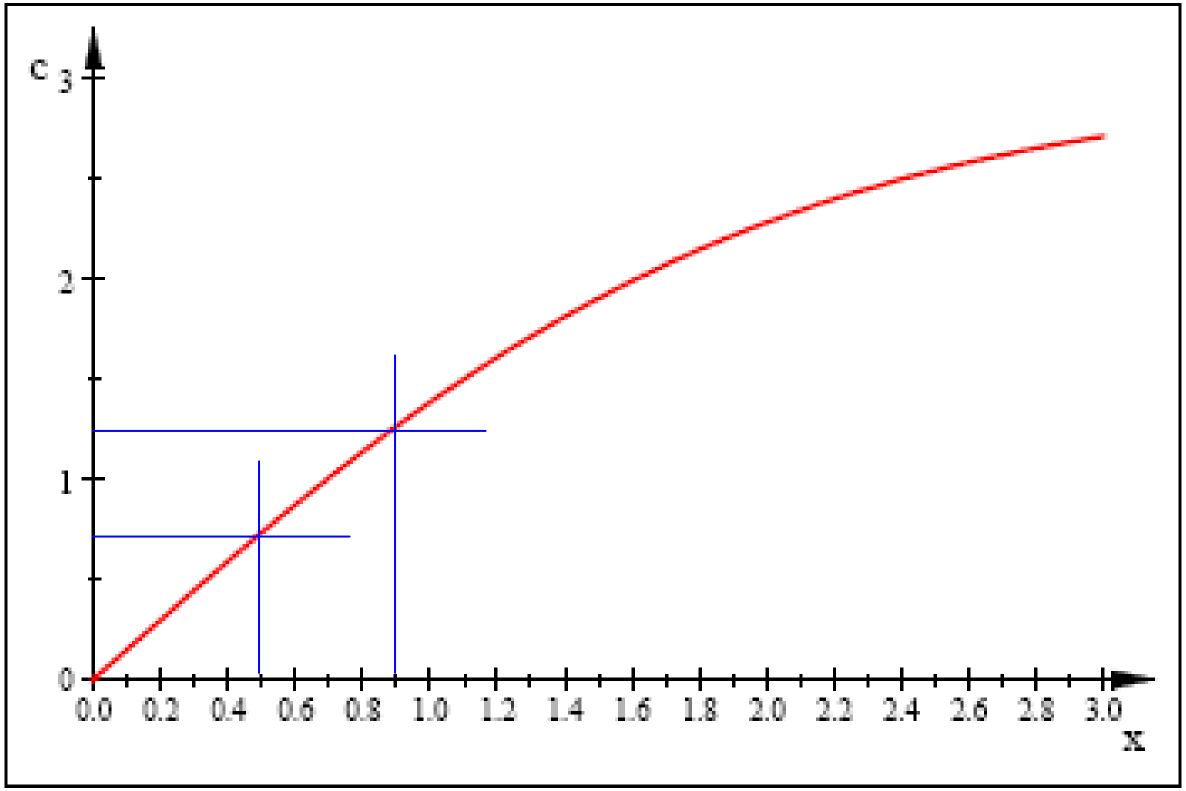
  las soluciones relevantes son z_0 y $1/z_0$ pero para cada solucion $1/z_0$ hay la inversa en z_0

$$(\gamma - 1)\frac{(\exp(2\beta\varepsilon)-1)}{(1+\exp(2\beta\varepsilon))}$$

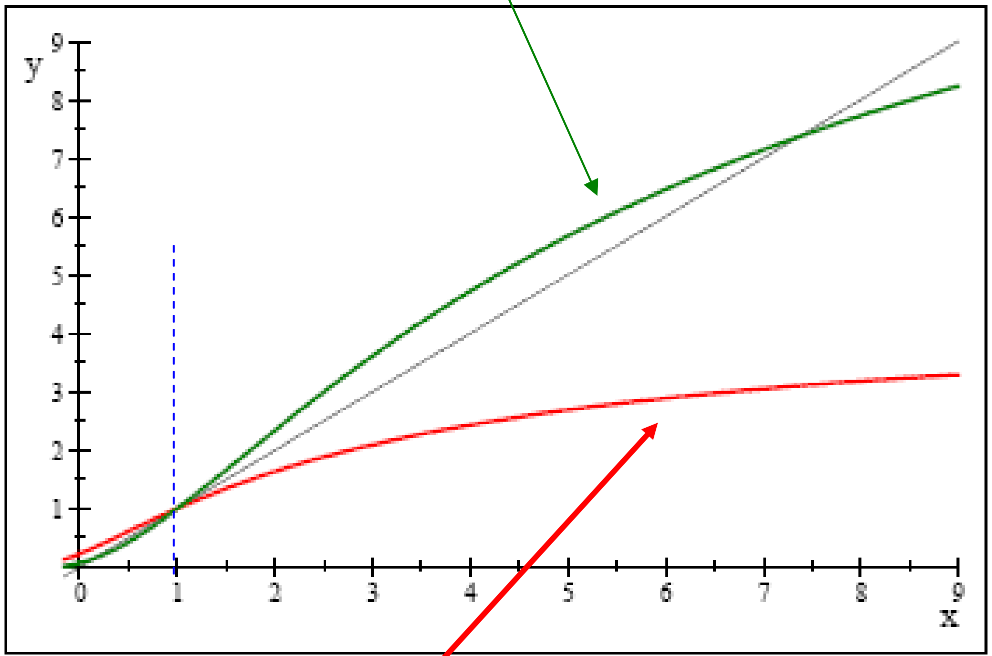
Sea $\gamma = 4$

$$2\beta\varepsilon = x$$

$$3 \cdot \frac{(\exp(x)-1)}{(1+\exp(x))}$$



Luego si $x = 0.9 \Rightarrow c > 1 \Rightarrow$



Luego si $x = 0.5 \Rightarrow c < 1 \Rightarrow$

Entonces imponiendo $c = 1$ obtenemos la temperatura critica

$$(\gamma - 1)\frac{(\exp(2\beta\varepsilon)-1)}{(1+\exp(2\beta\varepsilon))} = 1 \Rightarrow (\gamma - 1)(\exp(2\beta\varepsilon) - 1) = (1 + \exp(2\beta\varepsilon)$$

$$(\gamma - 1)\exp(2\beta\varepsilon) - \exp(2\beta\varepsilon) = (\gamma - 1) + 1 \Rightarrow \exp(2\beta\varepsilon) = \frac{\gamma}{(\gamma-2)} \Rightarrow$$

$$kT_c = \frac{2\varepsilon}{\log(\gamma/(\gamma-2))}$$

De donde

$$T > T_c \quad z = 1 \quad L = 0 \quad \sigma = \frac{1}{2(1+\exp(-2\beta\varepsilon))}$$

$$T < T_c \quad z > 1 \quad L > 0$$

El calor especifico es

$$C_I(0,T)/Nk = -\varepsilon\gamma\left(\frac{d\sigma}{dT} - \frac{dL}{dT}\right)$$

Para $T>T_c$

$$\boxed{C_I(0,T)/Nk = \frac{2\gamma\varepsilon^2}{(kT)^2}\frac{\exp(2\varepsilon/kT)}{(1+\exp(2\varepsilon/kT))^2}}$$

No se va a 0 para $T > T_c$

---

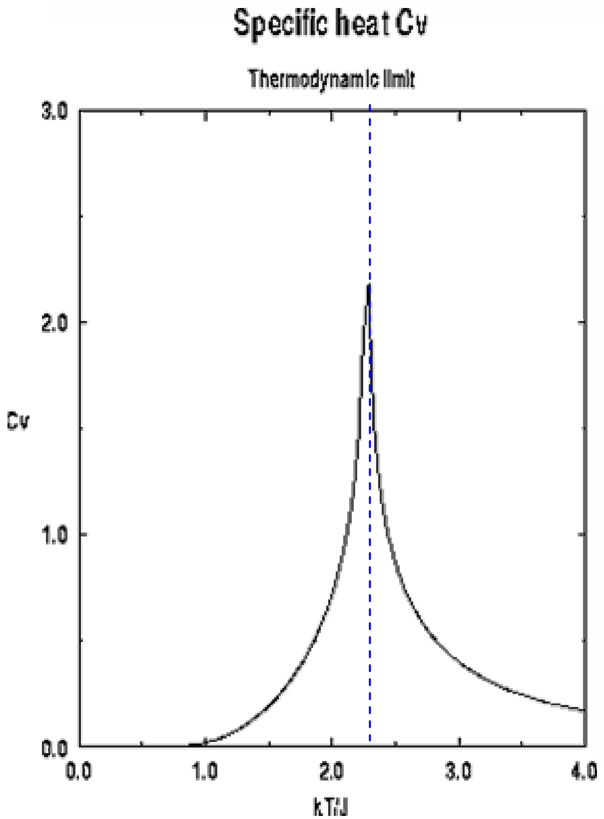
solo como referencia, la solucion de Onsager es (cerca del punto critico)

$$kT_c = \varepsilon \cdot 2.269185$$

$$\frac{1}{k}c_I(0,T) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\varepsilon}{kT_c}\right)\left[-\log\left|1-\frac{T}{T_c}\right| + \log\left(\frac{kT_c}{2\varepsilon}\right) - 1 - \frac{\pi}{4}\right]$$

En terminos de $\frac{kT}{\varepsilon}$

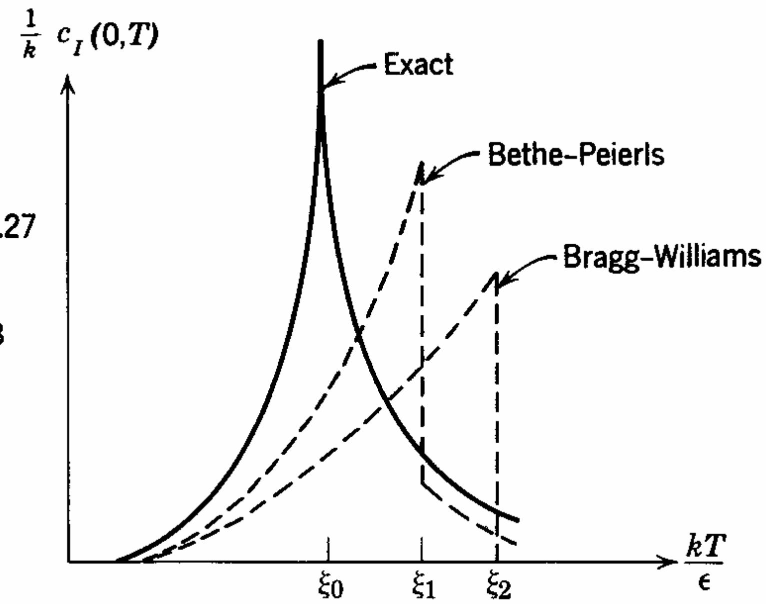
	Onsager	*Bethe – Peierls*	*Bragg – Williams*
kT_c/ε	2.27	2.88	4
	div. logaritmica	pico	pico



$$\xi_0 = \frac{1}{2\sinh^{-1} 1} = 2.27$$

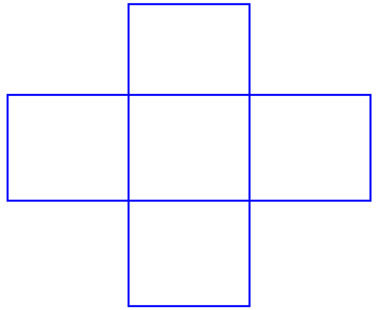
$$\xi_1 = \frac{2}{\log 2} = 2.88$$

$$\xi_2 = 4$$



kT_c/ε

En suma, estudiamos



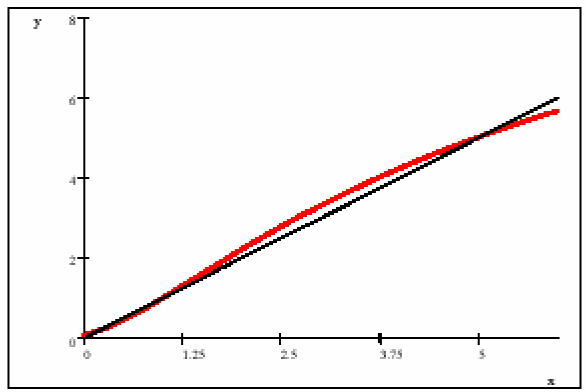
Representamos el resto del sistema por **z**

$$z = \left[\frac{1 + z\exp(2\beta\varepsilon)}{z + \exp(2\beta\varepsilon)} \right]^{\gamma - 1}$$

Notamos que un centro es lo mismo que un vecino

$$L = 2\frac{z^x}{1+z^x} - 1 = \frac{z^x - 1}{1+z^x}$$

Obtuvimos:



Las soluciones para Ising

$$\xi_0 = \frac{1}{2\sinh^{-1} 1} = 2.27$$

$$\xi_1 = \frac{2}{\log 2} = 2.88$$

$$\xi_2 = 4$$