

Critico_1



Recordemos que

Entonces la proba de encontrar un cluster de tamaño l es

$$\rho_l = q_0 l^{-\tau} x^{l^\sigma} y^l$$

Si se cumple que $\left. \begin{array}{l} x < 1 \\ y < 1 \end{array} \right\}$ ρ_l decae muy rapidamente con l
(gotitas pequeñas)

$$y = z \exp[\beta E_0 + S_0/k]$$

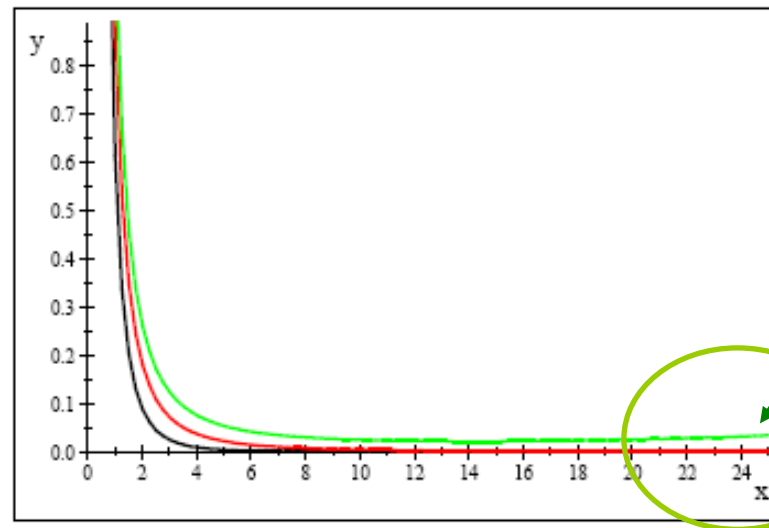
$$x = \exp[-a_0 \beta (\varpi - \omega T)]$$

Si se cumple que $\left. \begin{array}{l} x > 1 \\ y > 1 \end{array} \right\}$ ρ_l crece exponencialmente con l
 \Rightarrow fase liquida \leftrightarrow gota gigante

Cuando $y > 1$ (con $x < 1$) ρ_l primero decrece pero luego crecera para l grande

La presencia de clusters grandes indica la condensacion $\Rightarrow y = 1$ marca el limite de la condensacion

$$l^{-2.2} x^{l^{2/3}} y^l$$



X=0.9

Y=0.7

Y=1.0

Y=1.2

$\tau=2.2$

$$y = z \exp[\beta E_0 + S_0/k]$$

$$x = \exp[-a_0 \beta (\varpi - \omega T)]$$

$$x = \exp[-a_0\beta(\varpi - \omega T)]$$

$$y = z \exp[\beta E_0 + S_0/k]$$

Cuando $y = 1 \Rightarrow$

$$z_\sigma = \exp(-\beta(E_0 + TS_0))$$

Para y apenas por encima de y_σ Se puede calcular el l para el cual ρ_l se hace minimo

$$l_{\min} \simeq \left[\frac{a_0(\omega - \varpi T)}{(\mu - \mu_\sigma(T))} \right]^{1/(1-\sigma)}$$

Si se impone la condicion que el cluster mas pequeño (~ 1) sea inestable se obtiene que $T_c^{-1} = \varpi/\omega$ con lo que $x = 1$

Entonces el punto critico estara en $x = 1$, $y = 1$

Una pregunta que deberemos resolver es :
que son las gotas en Ising

Aproximacion de Bragg-Williams

Dadas las configuraciones de Ising, el sistema es descrito en terminos de N_+ y N_{++}

$\frac{N_+}{N}$ esta asociado a la densidad de un cuerpo
 $\frac{N_{++}}{N\gamma/2}$ estara asociado a correlaciones de 2 cuerpos.

Podemos pensar $\frac{N_+}{N}$ como asociado a propiedades del sistema en un escala "larga", vision global de la red.
Por otro lado $\frac{N_{++}}{N\gamma/2}$ esta asociado a correlaciones de rango corto.
O sea a propiedades "locales" del sistema.

En terminos de la analogia con ρ y $\rho^{(2)}$

Haciendo la siguiente transformacion:

$$\begin{aligned}\frac{N_+}{N} &\equiv \frac{1}{2}(L+1) &\rightarrow &-1 \leq L \leq 1 \\ \frac{N_{++}}{N_{\gamma/2}} &\equiv \frac{1}{2}(\sigma+1) &\rightarrow &-1 \leq \sigma \leq 1\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}N_+ &= \frac{N}{2}(L+1) \\ N_{++} &= \frac{N_{\gamma}}{4}(\sigma+1)\end{aligned}$$

Entonces la energia por spin es

$$\frac{1}{N}E_I(L, \sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma(2\sigma - 2L + 1) - HL$$

Hasta aqui todo es exacto.

La aproximacion de Bragg-Williams consiste en

$$\frac{N_{++}}{N\gamma/2} \approx \left(\frac{N_+}{N}\right)^2$$

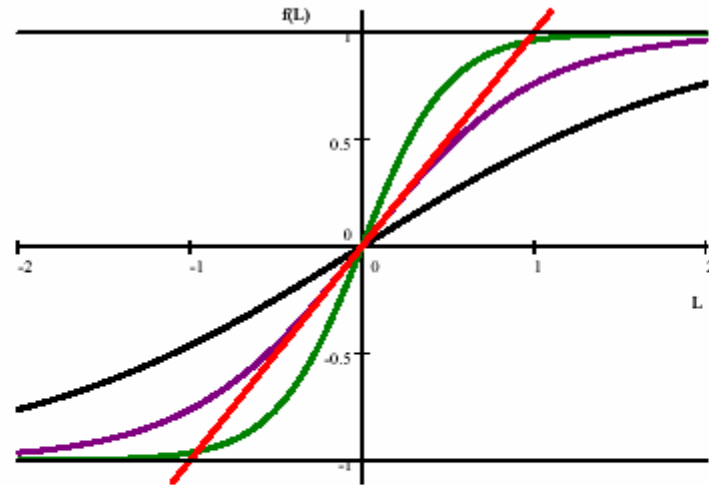
Que inmediatamente les recuerda ...

De lo cual

$$\rho^{(2)} = \rho^{(1)} \rho^{(1)}$$

con $H = 0 \Rightarrow$

$$\bar{L} = \tanh(\beta\epsilon\gamma\bar{L})$$



Así que hay una secuencia de soluciones dependiendo del valor de $\epsilon\gamma/kT$ (en el gráfico tomamos los valores 0.5 (negro), 1 (violeta), 2 (verde))

Entonces en esta aproximacion resulta para la energia:

$$\frac{1}{N}E_I(L, \sigma) = -\frac{1}{2}\varepsilon\gamma L^2 - HL$$

y por lo tanto

$$Q_I^{BG}(H, T) = \sum_{\{s_i\}} \exp\left[\beta N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma L^2 + HL\right)\right]$$

En función del termino dominante

$$Q_I^{BG}(H, T) = \log\{N!/[N_+!(N - N_+)!]\} + \left[\beta N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma \bar{L}^2 + H\bar{L}\right)\right]$$

Para encontrar el termino máximo

$$\begin{aligned} \log Q_I^{BG}(H, T) = & \log\left\{N!\left[\left(\frac{N}{2}(\bar{L} + 1)\right)!\left(\frac{N}{2}(1 - \bar{L})\right)!\right]\right\} + \\ & + \left[\beta N\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma \bar{L}^2 + H\bar{L}\right)\right] \end{aligned}$$

dado

$$\frac{1}{N} \log Q_I^{BG}(H, T) = -\left(\frac{L+1}{2}\right) \log\left(\frac{L+1}{2}\right) - \left(\frac{-L+1}{2}\right) \log\left(\frac{-L+1}{2}\right) + \left[\beta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\gamma\overline{L}^2 + H\overline{L}\right)\right]$$

Observar que se puede escribir:

$$-\left(\frac{L+1}{2}\right) \log\left(\frac{L+1}{2}\right) - \left(\frac{-L+1}{2}\right) \log\left(\frac{-L+1}{2}\right) = -\frac{\overline{L}}{2} \log\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right) + \frac{\overline{L}}{2} \log\left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right) + \log\left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right) \right]$$

$$\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right)\left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 - \overline{L}^2)$$

$$-\frac{\overline{L}}{2} \log\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right) + \frac{\overline{L}}{2} \log\left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{-\overline{L}^2+1}{4}\right) \right]$$

$$-\frac{\overline{L}}{2} \left[\log\left(\frac{\overline{L}+1}{2}\right) - \log\left(\frac{-\overline{L}+1}{2}\right) \right] - \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{-\overline{L}^2+1}{4}\right) \right]$$

$$-\frac{\overline{L}}{2} \left[\log\left(\frac{\overline{L}+1}{-\overline{L}+1}\right) \right] - \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{-\overline{L}^2+1}{4}\right) \right]$$

como se cumpla

$$\frac{\overline{L}+1}{-\overline{L}+1} = \exp 2\beta(\varepsilon\gamma\overline{L} + H)$$

se obtiene

$$-\frac{\overline{L}}{2}(2\beta(\varepsilon\gamma\overline{L} + H)) - \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{-\overline{L}+1}{4}\right)\right]$$

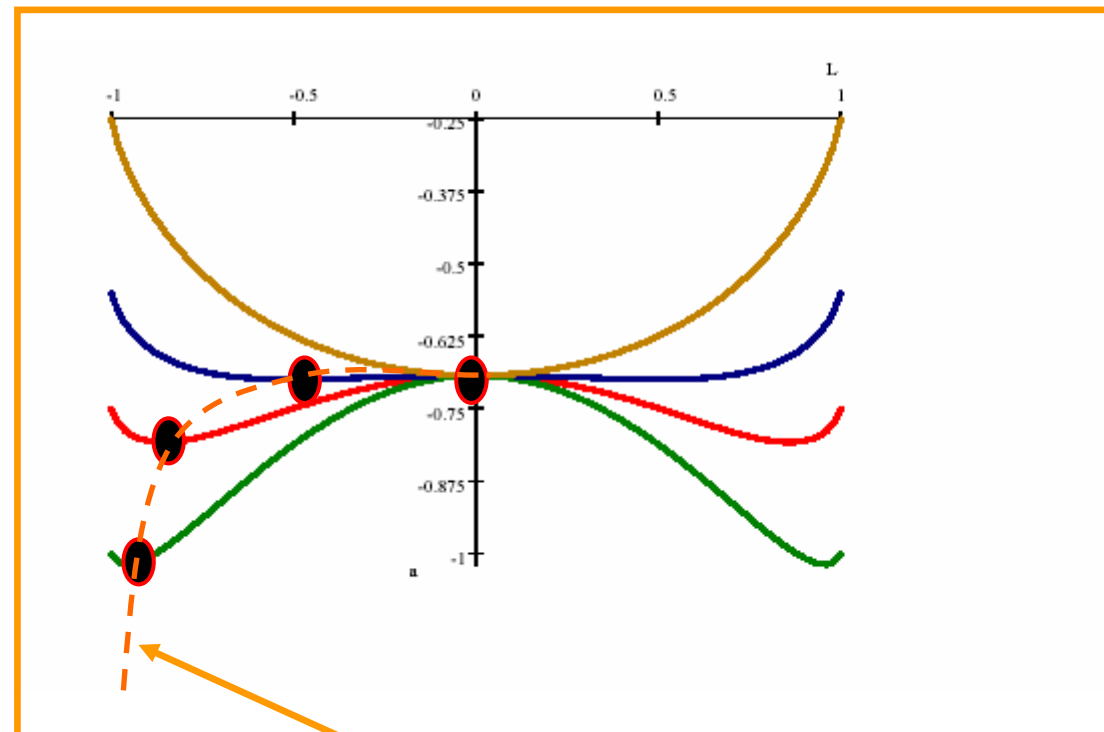
Entonces reuniendo todo y multiplicando por kT para obtener A

$$\frac{1}{N}A_I(H, T) = \varepsilon\gamma\overline{L}^2 + H\overline{L} + \frac{kT}{2}\left[\log\left(\frac{-\overline{L}+1}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\varepsilon\gamma\overline{L}^2 + H\overline{L}\right]$$

$$\frac{1}{N}A_I(H, T) = \frac{1}{2}\varepsilon\gamma\overline{L}^2 + \frac{kT}{2}\left[\log\left(\frac{-\overline{L}+1}{4}\right)\right]$$

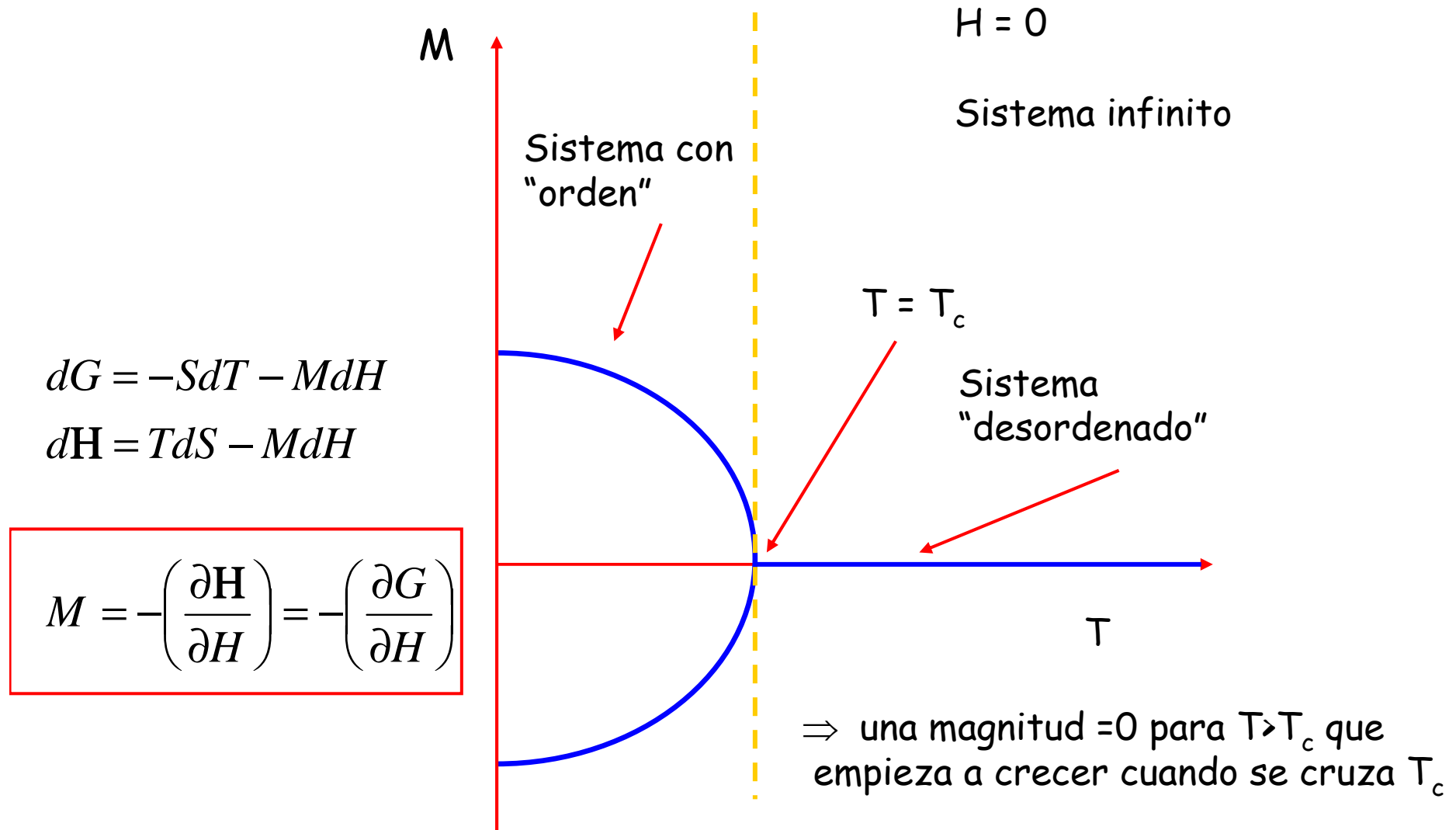
Para el potencial Termodinámico

Sea $T < T_c = \varepsilon\gamma/k$; sea $T_c/T = 1.5$ (rojo) , $T_c/T = 2$ (verde) ,
 $T_c/T = 1.1$ (azul) , $T_c/T = 0.9$ (marron)



mínimos

La Magnetización es



Los exponentes criticos

Analogias entre sistemas magneticos y fluidos

$$H, M, T \rightarrow P, V, T$$

Las funciones respuesta seran

i)

$$C_V, C_p \rightarrow C_M, C_H$$

$$C_M = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_M = -T \left(\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \right)_M$$

Atencion $V \rightarrow -M$
Pues

M crece con H
 V decrece con P

$$G = U - TS - HM$$

$$G = U - TS + PV$$

ii)

$$\kappa_T, \kappa_S \rightarrow \chi_T, \chi_S$$

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial H^2} \right)_T$$

Esto es la Susceptibilidad

respecto de la dependencia de la magnetización con H

$$M = \sum s_i = NL$$

la susceptibilidad magnética es entonces

$$\chi(H, T) = \frac{\partial}{\partial H} NL \rightarrow N \frac{\partial L}{\partial H} = NL'$$

como

$$\bar{L} = \tanh(\beta(\epsilon \gamma \bar{L} + H))$$

$$\overline{L} = \tanh(\beta(\varepsilon\gamma\overline{L} + H)) \Rightarrow$$

$$L' = (\cancel{\beta(H + L\gamma\varepsilon)} + \cancel{\beta(L\gamma\varepsilon' + L\varepsilon\gamma' + \gamma\varepsilon L' + 1)}) \cdot$$

$$\bullet (1 - \tanh^2(\beta(H + L\gamma\varepsilon)))$$

$$L' = (\beta(\gamma\varepsilon L' + 1))(1 - \tanh^2(\beta(H + L\gamma\varepsilon)))$$

de donde con $H = 0$

$$L' = \beta(\gamma\varepsilon L' + 1)(1 - \tanh^2(\beta(L\gamma\varepsilon))) = \beta\gamma\varepsilon L'(1 - \tanh^2(\beta(L\gamma\varepsilon)) \dots$$

$$L' = \beta(\gamma \, \varepsilon L' + 1)(1 - \tanh^2(\beta(H + L \, \gamma \, \varepsilon)))$$

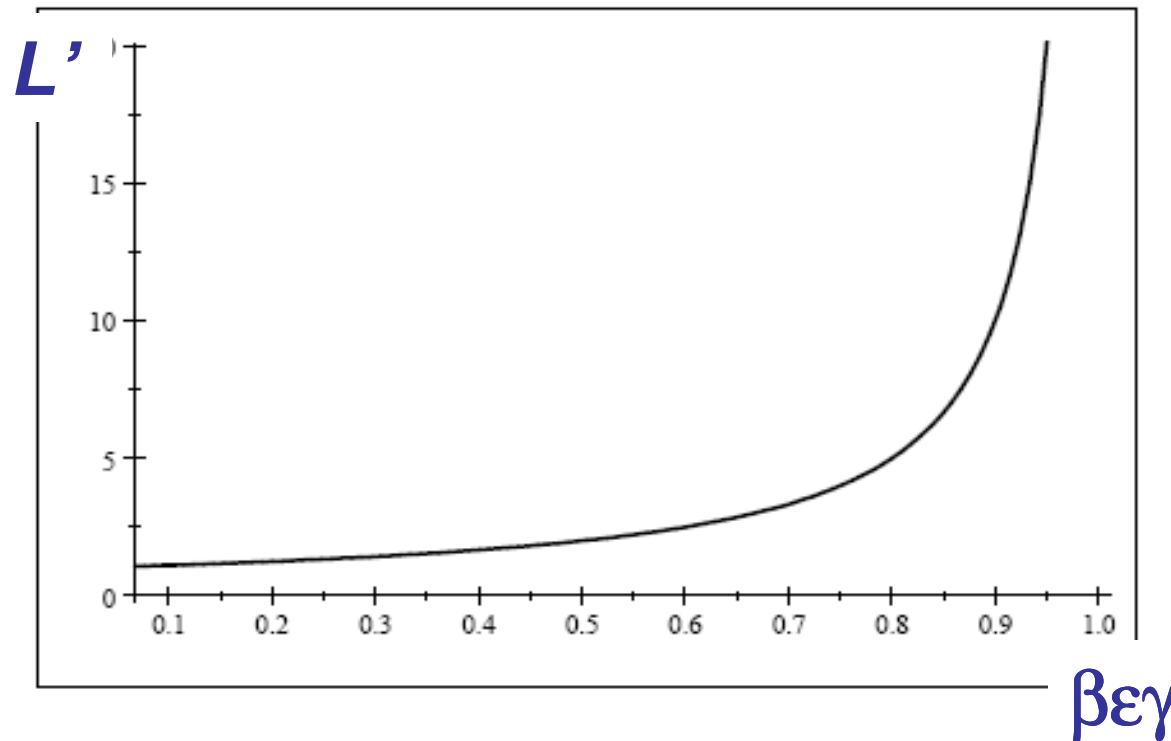
$$L' = \beta \, \gamma \, \varepsilon L'(1 - \tanh^2(\beta(L \, \gamma \, \varepsilon))) + (1 - \tanh^2(\beta(L \, \gamma \, \varepsilon)))$$

$$L'(1 - \beta \, \gamma \, \varepsilon(1 - \tanh^2(\beta(L \, \gamma \, \varepsilon)))) = (1 - \tanh^2(\beta(L \, \gamma \, \varepsilon)))$$

$$\begin{aligned} L' &= \frac{(1 - \tanh^2(\beta(L \, \gamma \, \varepsilon)))}{1 - \beta \, \gamma \, \varepsilon(1 - \tanh^2(\beta(L \, \gamma \, \varepsilon)))} = \frac{1}{-\beta \, \gamma \, \varepsilon + (1 - \tanh^2(\beta(L \, \gamma \, \varepsilon)))^{-1}} \\ &= \frac{1}{-\beta \, \gamma \, \varepsilon + \left(1 - \left(\frac{\sinh}{\cosh}\right)^2\right)^{-1}} = \frac{1}{-\beta \, \gamma \, \varepsilon + \cosh^2(\beta \, \gamma \, \varepsilon L)} \end{aligned}$$

si $\beta \gamma \varepsilon < 1$ entonces $L = 0$

(solucion de equilibrio)



obtenemos entonces para $\chi_{T,N}$

$$\chi_{T,N} = \left(\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H} \right) = \frac{\beta N}{\cosh^2(\beta \epsilon \gamma L + \beta H) - \beta \epsilon \gamma}$$

Cuando $H=0$ (con $T_c = \epsilon \gamma / k$)

$$\chi_{T,N} = \frac{2N}{\epsilon \gamma} \frac{(T_c/T)}{\cosh^2((T_c/T)L) - (T_c/T)}$$

Que tiene una divergencia en T_c (

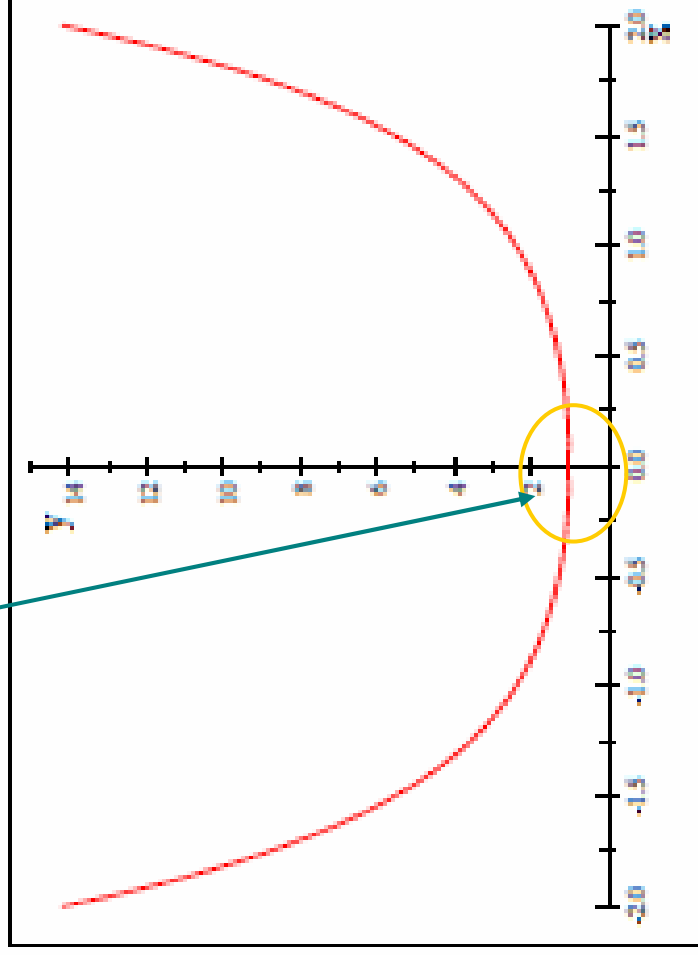
Cuando L se hace 0

Si $L=0$

Comportamiento de $\chi_{T,N}$ ($\sim \frac{x}{1-x}$)

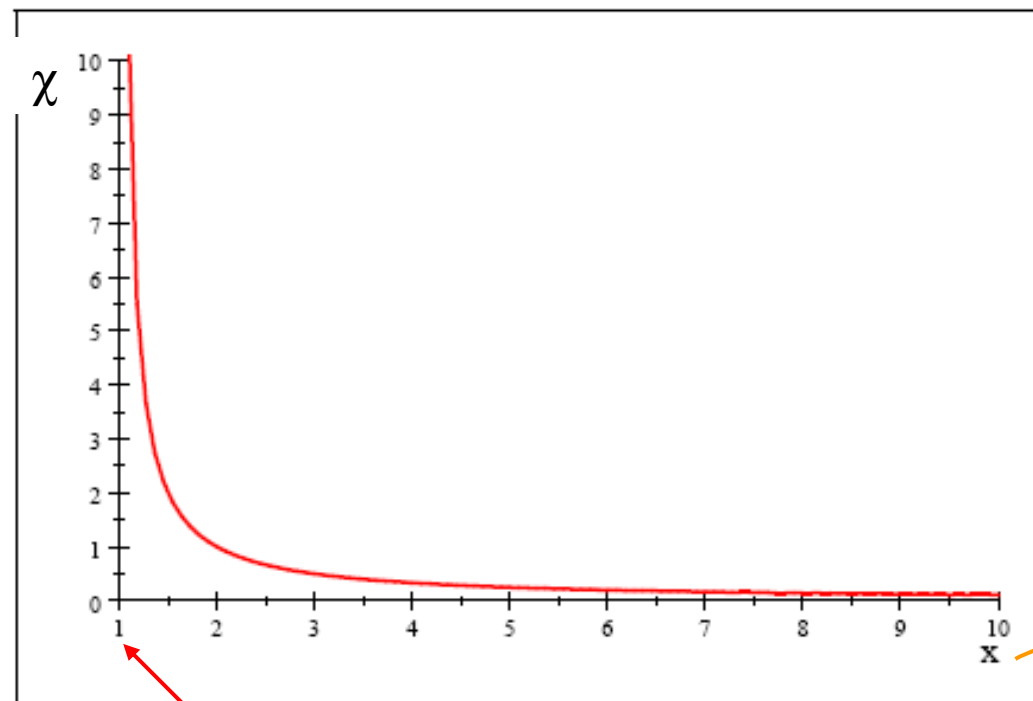
$$\chi_{T,N} = \frac{2N}{\epsilon\gamma} \frac{(T_c/T)}{\cosh^2((T_c/T)L) - (T_c/T)}$$

$\cosh^2(x)$



Si $L=0$

Comportamiento de $\chi_{T,N}$ ($\sim \frac{1/x}{1-1/x}$) , con $x = \frac{T}{T_c}$



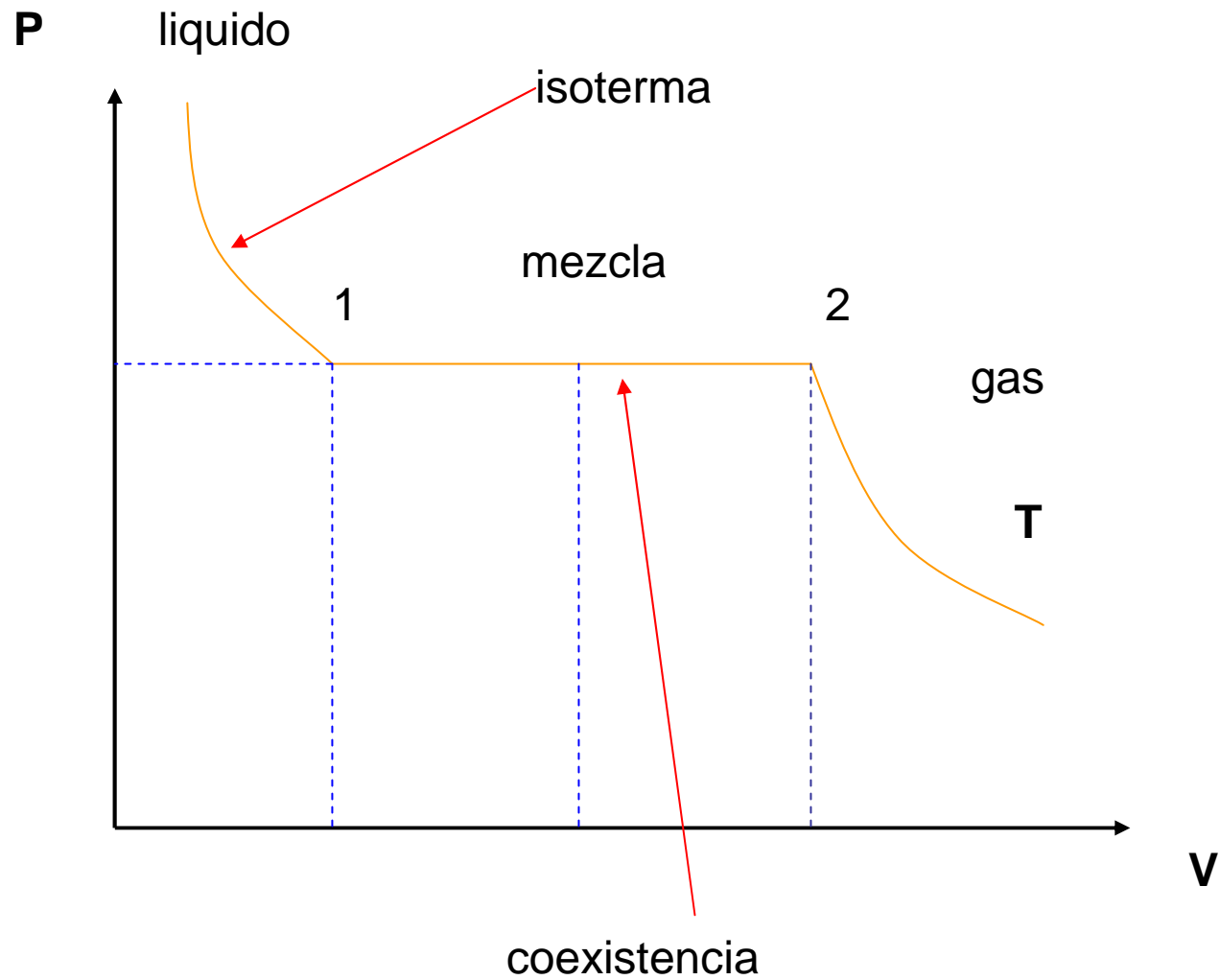
Divergencia al acercarnos a T_c
por encima de T_c

Resultados relevantes

- 1) Hay una magnitud que empieza a crecer cuando se cruza la T_c
- 2) Hay una derivada segunda de G que diverge

La Clasificación Termodinámica de las transiciones de fase

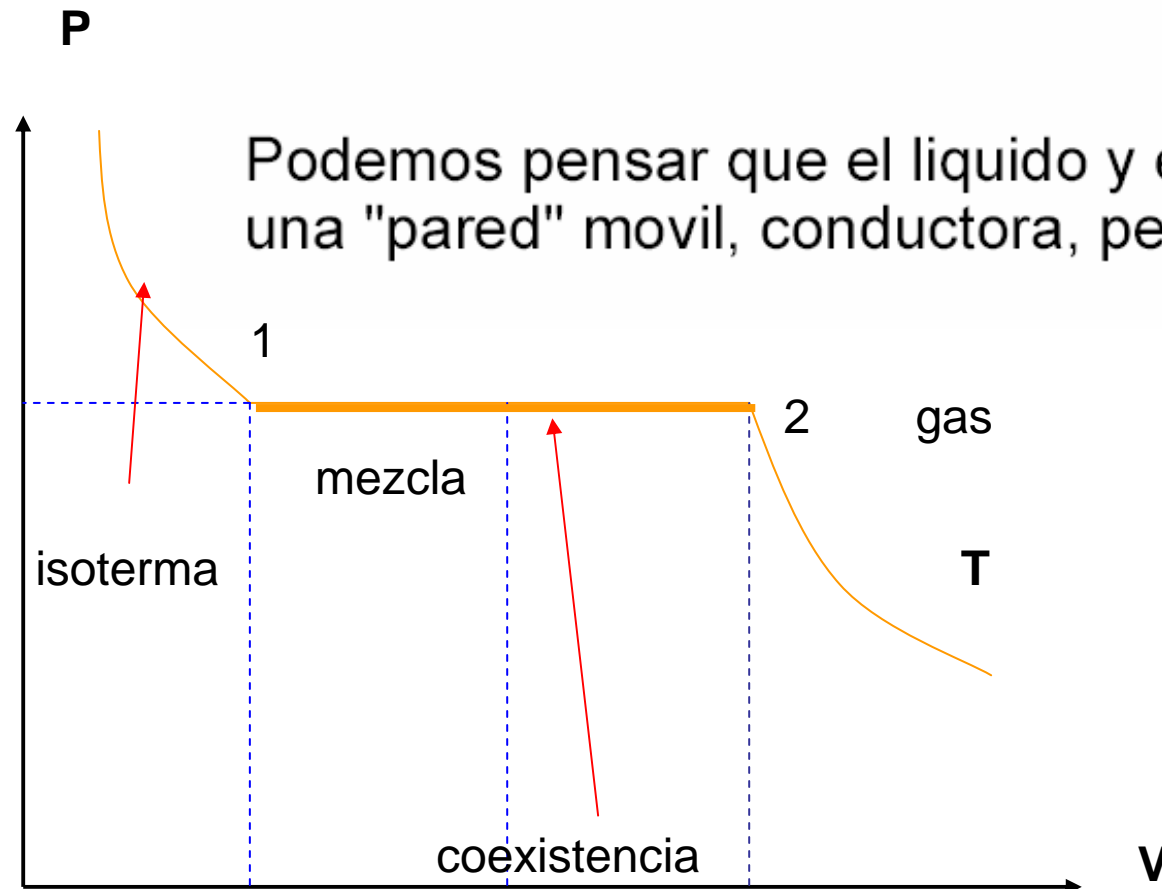
Visión Termodinámica de las transiciones de fase



Condiciones del sistema durante transiciones de fase liquido vapor

1) durante la transición de fase en coexistencia P y T se mantienen constantes.

2) El estado del liquido (gas) en la mezcla es el mismo que en 1 (2)



Podemos pensar que el liquido y el gas estan seprados por una "pared" movil, conductora, permeable.

Suponemos que la masa total se conserva y entonces el pasaje de una fase a la otra. Se realiza a masa total cte

Como el sistema se encuentra a P y T ctes. resulta apropiado usar Gibbs.

$$(dG = -Sdt + PdV)$$

En equilibrio Gibbs esta en un minimo \Rightarrow conservando P y T ctes al variar otros parametros $\delta G = 0$

El cambio en el sistema es el pasaje de una "unidad de masa" δm de un estado al otro luego

$$-\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m$$

Suponiendo sistema muy grande y considerando que los efectos de la superficie son despreciables

$$G = m_1 g_1 + m_2 g_2$$

con g Gibbs por unidad de masa que como vimos es el potencial químico.

Como estamos en el mínimo

$$\delta G = 0 = -(g_1 - g_2) \delta m \Rightarrow g_1 = g_2$$

$dg = -sdT + v dP$ donde s y v son por unidad de masa entonces g satisface

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T} \right)_P = -s$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial P} \right)_T = v$$

Entonces

$$\left(\frac{\partial(g_2 - g_1)}{\partial T} \right)_P = -(s_2 - s_1) = -\Delta h/T$$

$$(dh = Tds + vdP)$$

donde h es la entalpia por unidad de masa y es el calor a P cte. Como para pasar de liquido a vapor tenemos que entregar calor $\Rightarrow -(s_2 - s_1) < 0$

2 \rightarrow gas
1 \rightarrow liquido

ademas

$$\left(\frac{\partial(g_2 - g_1)}{\partial P} \right)_T = (v_2 - v_1) > 0$$

Partiendo de estas ecuaciones

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial T}\right)_P = -\frac{\Delta S}{\Delta V}$$

como tenemos variables de estado

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{\Delta g} \left(\frac{\partial P}{\partial \Delta g}\right)_T = -1$$

de donde

$$\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial \Delta g}\right)_T = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\Delta g=0}$$

$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\Delta g=0}$ es la derivada de la presion de vapor en equilibrio.

Entonces

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\Delta g=0} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{T\Delta S}{T\Delta V} == \frac{\Delta h}{T\Delta V}$$

Ecuacion de Clayperon

Huang

La Clasificación Termodinamica de las transiciones de fase

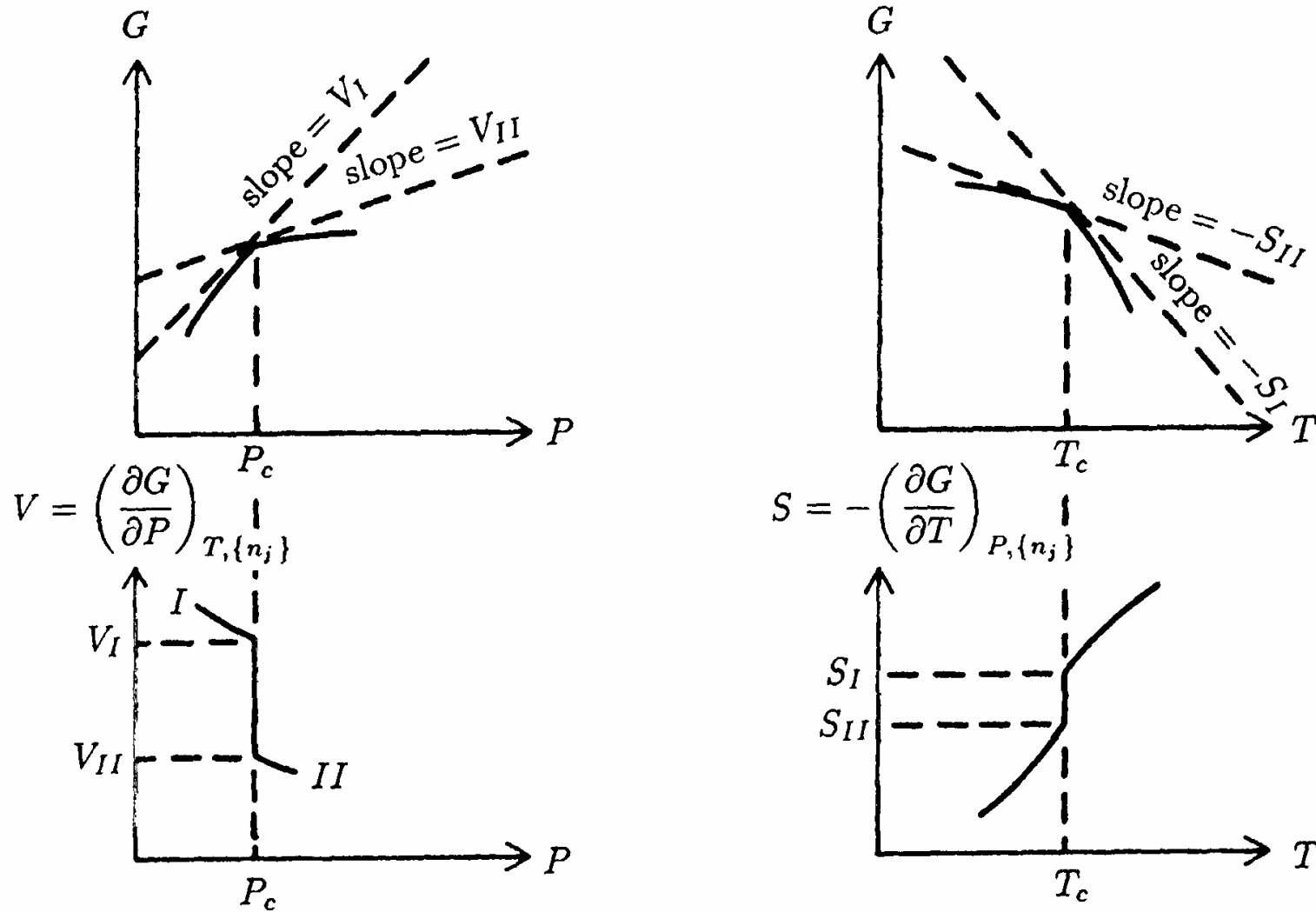
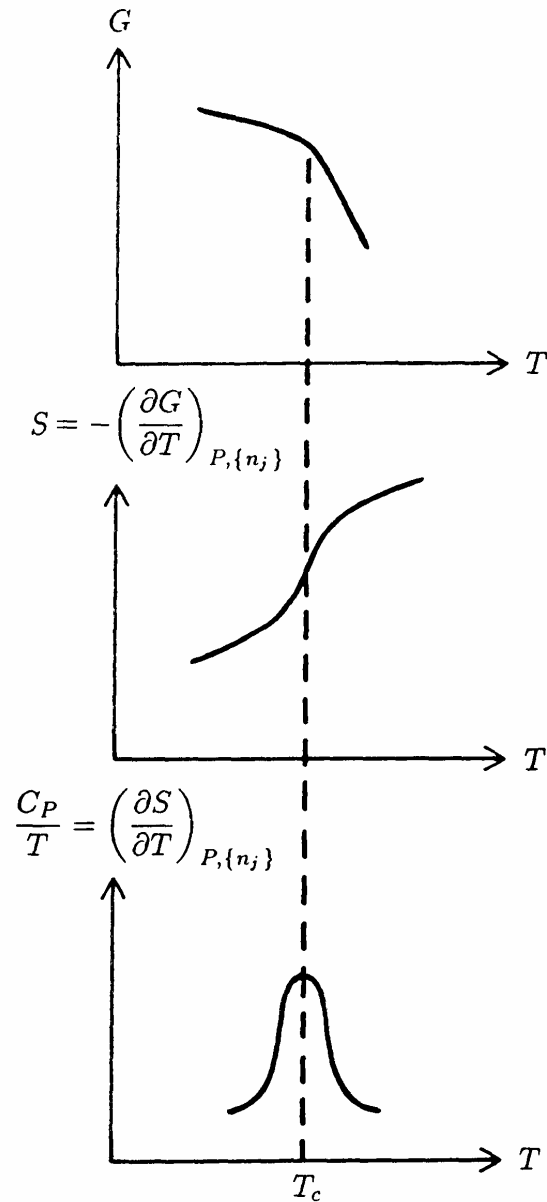


Fig. 3.2. Typical behavior for the Gibbs free energy at a first-order phase transition.

La Clasificación Termodinamica de las transiciones de fase



Ising lattices finitas

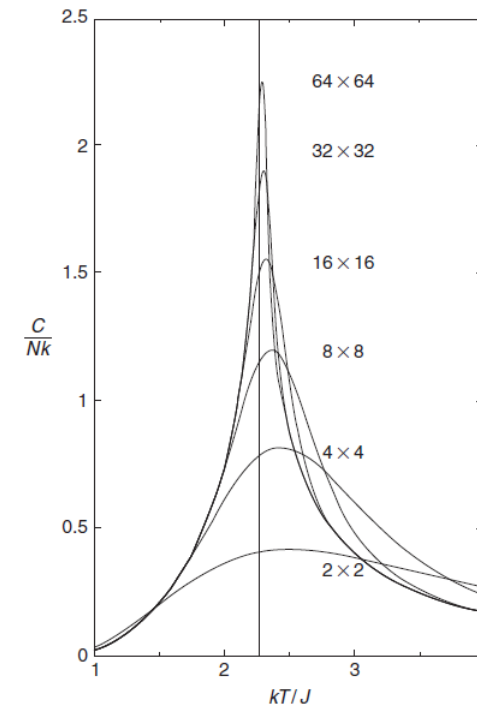


FIGURE 13.17 Specific heat of the two-dimensional Ising model for finite $2 \times 2, 4 \times 4, \dots, 64 \times 64$ lattices. The specific heat is analytic for all finite lattices. The maximum value of the specific heat grows proportional to the logarithm of the linear dimension of the lattice and the location of the maximum approaches the bulk critical temperature (denoted by the vertical line) proportional to the inverse of the linear dimension of the lattice. From Ferdinand and Fisher (1969). Reprinted with permission; copyright © 1969, American Physical Society.

Fig. 3.3. Typical behavior for the Gibbs free energy at a continuous phase transition. The heat capacity can exhibit a peak at the transition.

landau

1934→ Bragg Williams

1935→ Bethe

1937→ Landau propone un teoria unificada del comportamiento de sistemas en la vecindad del punto critico. (de campo medio)

Esto es para sistemas que tienen la segunda derivada de la energia libre divergente (calor especifico y suceptibilidad) (en realidad derivadas de orden superior)

Lo que hemos observado es que, $M = \sum s_i = NL$ vale 0 para $T > T_c$ y empieza a crecer para $T < T_c$

Introduce entonces el concepto de parametro de orden m_0 que es 0 por encima de T_c y distinto de 0 por debajo, en suma es pequeño en la vecindad del punto critico.

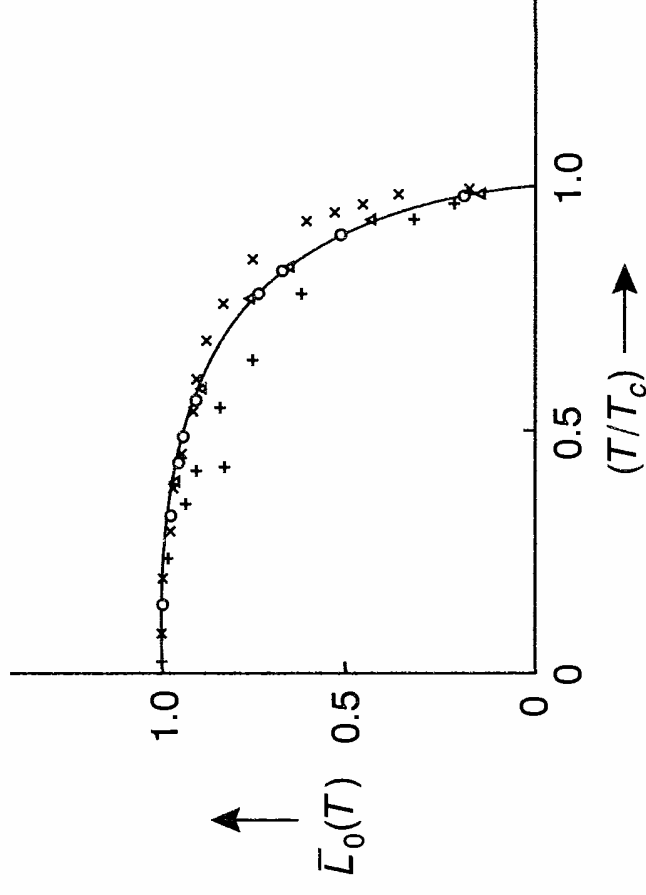


FIG. 11.7. The spontaneous magnetization of a Weiss ferromagnet as a function of temperature. The experimental points (after Becker) are for iron (\times), nickel (o), cobalt (Δ) and magnetite (+).

Luego sugiere expandir la energia libre en terminos de m_0 , en ausencia de H (el campo que rompe la simetria), el sistema debe ser simetrico y por lo tanto la expansion solo involucrara terminos pares. *

Sea $t = \frac{T-T_c}{T_c}$ y estudiamos la region $|t| \ll 1$

Sea $\Psi(t, m_0, Y) = \Psi_0(t, Y) + r(t)m_0^2 + s(t)m_0^4 + \dots$

En principio $r(t) = \sum r_k t^k$; etc.

Solo tomamos terminos pares para que $\Psi(t, m_0, Y)$ sea una funcion par de m y por lo tanto invariante ante inversion de signo de los spines.

•Esta expansión es un tanto osada pues derivadas segundas en el punto critico dan funciones respuesta que probablemente diverjan. Landau supone que las divergencias se dan en derivadas superiores

Las soluciones de equilibrio corresponderán a (un minimum)

$$\frac{\partial \Psi(t, m_0)}{\partial m_0} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Psi(t, m_0)}{\partial m_0^2} \geq 0$$

Desarrollamos y minimizamos respecto de m_0 a orden m_0^4

$$0 = r(t)m_0 + 4s(t)m_0^3 = m_0(r(t) + 4s(t)m_0^2)$$

Necesitamos que sea minimo \Rightarrow la derivada segunda debera ser ≥ 0

$$0 \leq r(t) + 12s(t)m_0^2$$

Entonces, con $s(t) > 0$ garantizamos que, para m_0 grande, la energia libre crezca y entonces el sistema sera estable.

Elegimos ahora $r(t) > 0$ para $T > T_c$ y $r(t) < 0$ para $T < T_c$.

De esta forma

- i) en $T > T_c$ el minimo estara en $m_0 = 0$
- ii) cuando $T < T_c$ sera $m_0 \neq 0$

$\Psi(t, m_0, Y)$ debe ser continua $\Rightarrow r(t)$ debera ser 0 en $t = 0$

Elegimos entonces

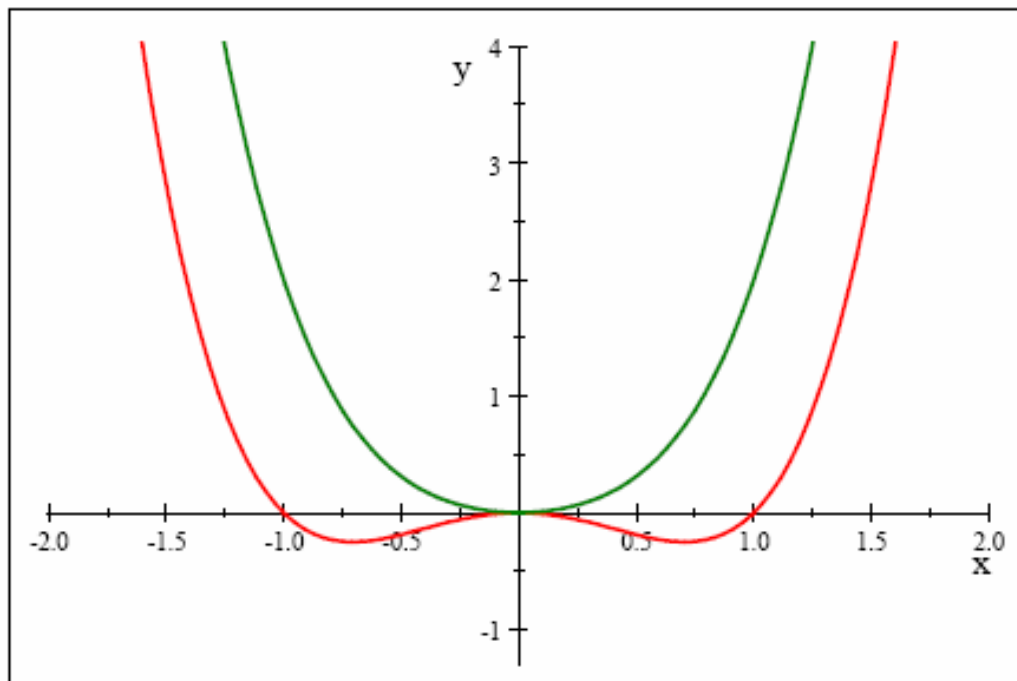
$$r(t) = r_0 t$$

$$r_0 t = \alpha_2 t$$

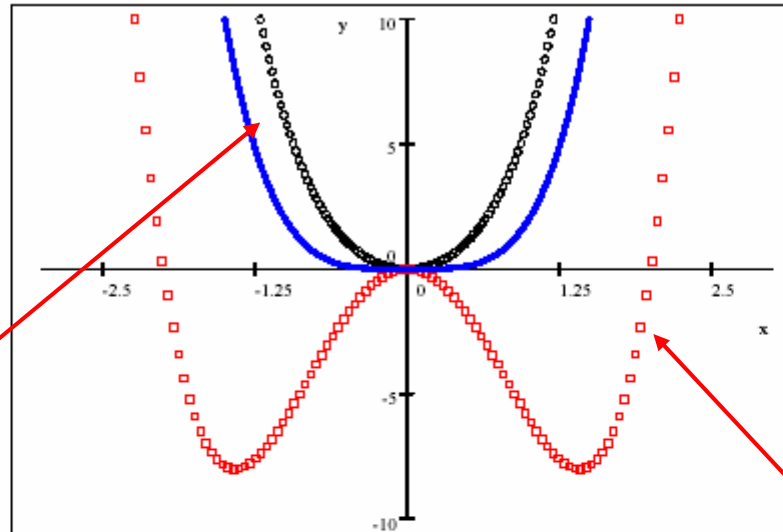
$$t = \frac{T - T_c}{T_c}$$

La forma general es entonces

$$-x^2 + x^4$$



De esta forma el potencial termodinámico tendrá la forma :



Con $r(t) > 0$ (círculos), $r(t) = 0$ (continua), $r(t) < 0$ (cuadrados)

$$m_0(2r(t) + 4s(t)m_0^2) = 0$$

Las soluciones son(para los mínimos)

$$m_0 = 0 \quad \text{o} \quad m_0 = \pm \sqrt{\frac{-r(t)}{2s(t)}} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2(T_c - T)}{2s(t)}}$$

$$\begin{aligned} r_0 t &= \alpha_2 t, \\ s(t) &= \alpha_4 \end{aligned}$$

$$\Psi(t, m_0, Y) = \Psi_0(t, Y) + \alpha_2 t \eta^2 + \alpha_4 \eta^4$$

El potencial Termodinamico resultante:

$$\Psi(t, m_0, Y) = \Psi_0(t, Y) \text{ para } T > T_c \quad (m_0 = 0)$$

$$\Psi(t, m_0, Y) = \Psi_0(t, Y) - \frac{\alpha_2^2 (T_c - T)^2}{4\alpha_4} \text{ para } T < T_c$$

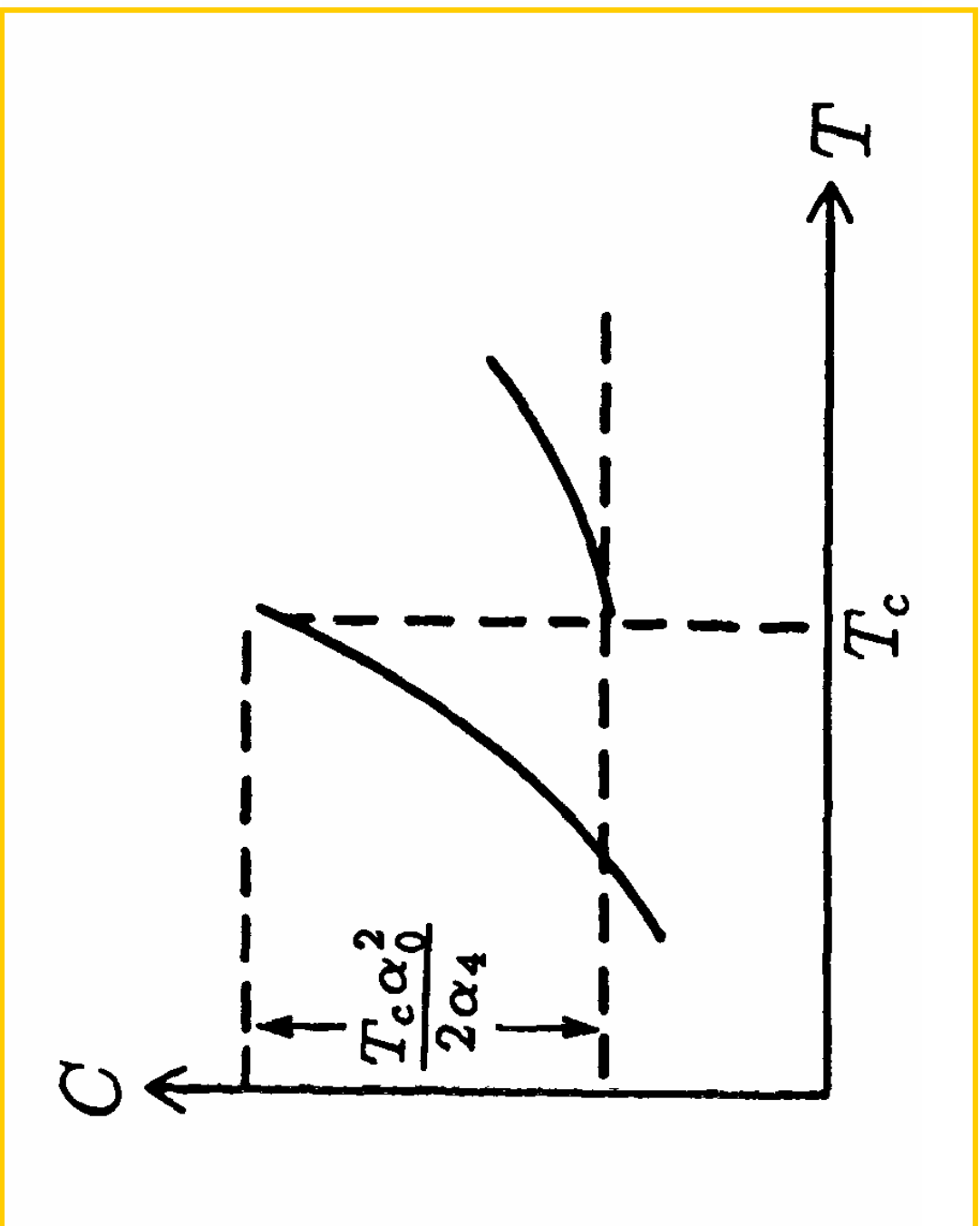
Calculamos el calor especifico

$$C_y = -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \Psi_0(t, m_0) \big|_y$$

Si consideramos que α_4 y α_2 dependen muy debilmente de la Temperatura

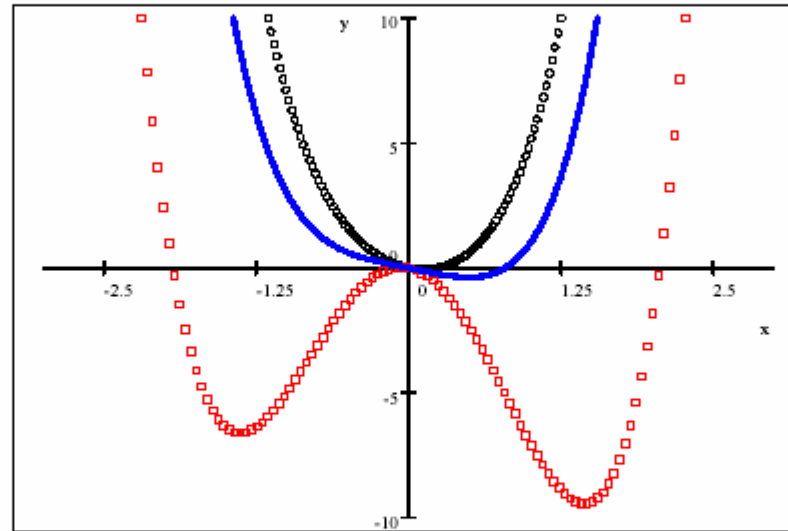
$$C_y(T_c^-) - C_y(T_c^+) = \frac{T_c \alpha_2^2}{2\alpha_4}$$

O sea que tiene un salto finito en T_c



Supongamos ahora que tenemos un campo externo

$$\begin{aligned}\Psi'(t, m_0, Y) &= \Psi(t, m_0, Y) - fm_0 \\ &= \Psi_0(t, Y) + t\alpha_2 m_0^2 + \alpha_4 m_0^4 - fm_0\end{aligned}$$



con $f = 1$ y los mismos valores de los parametros elegidos previamente.

Para $T > T_c$

El parametro de orden deja de ser 0 y las soluciones de equilibrio son

$$\frac{\partial}{\partial m_0} \Psi' = t 2\alpha_2 m_0 + 4\alpha_4 m_0^3 - f = 0$$

calculamos la derivada con respecto de f

$$t 2\alpha_2 m'_0 + 12\alpha_4 m_0^2 m'_0 - 1 \Rightarrow$$

$$\chi(f) = m'_0]_{T,Y} = \frac{1}{2\alpha_2 t + 12\alpha_4 m_0^2}$$

Si ahora trabajamos en el limite $f \rightarrow 0$

$$\text{para } T > T_c \quad m_0 \rightarrow 0$$

$$\text{para } T < T_c \quad m_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha_2(T_c - T)}{2\alpha_4}}$$

Luego en este limite

$$T > T_c$$

$$\chi \rightarrow \frac{1}{2\alpha_2 t} = \frac{1}{2\alpha_2 (T - T_c)}$$

$$T < T_c$$

$$\chi \rightarrow -\frac{1}{4\alpha_2 t} = \frac{1}{4\alpha_2 (T - T_c)}$$

Que divergen en T_c

definicion de exponentes criticos

1) Cuando el sistema cruza el punto critico el parametro de orden empieza a crecer desde 0

2) En la vecindad del punto critico el sistema sobrelleva procesos de "ajuste" a fin de adaptarse microscopicamente a esta nueva situacion.

Esto se refleja en la aparicion de grandes fluctuaciones

3) Cuando uno se acerca al punto critico las funciones termodinamicas pueden tener distintos comportamientos (divergencias, anularse, etc.)

El parametro para expandirlas es entonces

$$\epsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$

En la vecindad del punto critico las funciones termodinamicas se escriben de la siguiente forma

$$f(\epsilon) = A\epsilon^\lambda (1 + B\epsilon^\gamma + \dots)$$

con $\gamma > 0$

El exponente critico esta definido por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log f(\epsilon)}{\log \epsilon}$$

de este modo si

$\lambda < 0$	diverge
$\lambda > 0$	se va a 0
$\lambda = 0$	divergencia logaritmica? $f(\epsilon) = A + B\epsilon^{\frac{1}{2}}$?

Algunos exponentes criticos

Recordemos que $\epsilon = \frac{T-T_c}{T_c}$

a) grado de la isoterma critica

$$\frac{P-P_c}{P_c^0} \propto \left| \frac{P-P_c}{P_c} \right|^{\delta} \text{sign}(P - P_c)$$

$$H/H_c^0 \propto |M(T = T_0)/M(T = 0)|^{\delta}$$

$P_c^0 = \frac{kT_c \rho_c}{m}$ que es el termino para sistema no interactivos

b) Parametro de orden

$$\begin{aligned} \{\rho_L(T) - \rho_G(T)\} / 2\rho_c &\propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta (1 + \dots) \\ M_0(T) / M_0(0) &\propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta (1 + \dots) \end{aligned}$$

c) La compresibilidad isotermica.

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_T}{\kappa_T^0} &= \begin{cases} A_\gamma (-\epsilon)^{-\gamma'} & T < T_c \\ A_\gamma (-\epsilon)^{-\gamma} & T > T_c \end{cases} \\ \frac{\chi_T}{\chi_T^0} &= \begin{cases} A_\gamma (-\epsilon)^{-\gamma'} & T < T_c \quad H = 0 \\ A_\gamma (-\epsilon)^{-\gamma} & T > T_c \quad H = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

d) El calor específico

$$C_V = \begin{cases} A(-\epsilon)^{-\alpha'} & T < T_c & \rho = \rho_L \text{ o } \rho = \rho_G \\ A'(-\epsilon)^{-\alpha} & T > T_c & \rho = \rho_c \end{cases}$$

$$C_H = \begin{cases} A(-\epsilon)^{-\alpha'} & T < T_c & H = 0 \\ A'(-\epsilon)^{-\alpha} & T > T_c & H = 0 \end{cases}$$

Algunas definiciones

	exp	def.	ε	H	M
	α'	$C_H \propto (-\varepsilon)^{-\alpha'}$	< 0	0	0
	α	$C_H \propto \varepsilon^{-\alpha}$	> 0	0	0
	β	$M \propto (-\varepsilon)^\beta$	< 0	0	$\neq 0$
	γ'	$\chi_T \propto (-\varepsilon)^{-\gamma'}$	< 0	0	$\neq 0$
	γ	$\chi_T \propto \varepsilon^{-\gamma}$	> 0	0	
	δ	$H \propto M ^\delta \text{sign}(M)$	0	$\neq 0$	$\neq 0$
Distancia corr.	ν'	$\xi \propto (-\varepsilon)^{-\nu'}$	< 0	0	$\neq 0$
Función de correlación De pares	η	$\Gamma(r) \propto r ^{-(d-2-\eta)}$	0	0	0

b'') Exponentes críticos para Van der Waals

Cuales seran los exponentes criticos para la ecuacion de estado de VdW?

Recordemos que esta EOS se escribe como

$$P = \frac{nRT}{(V - nb)} - \frac{an^2}{V^2}$$

Sea ahora

$$\tilde{P} = P/P_c \quad \tilde{V} = V/V_c \quad \tilde{T} = T/T_c$$

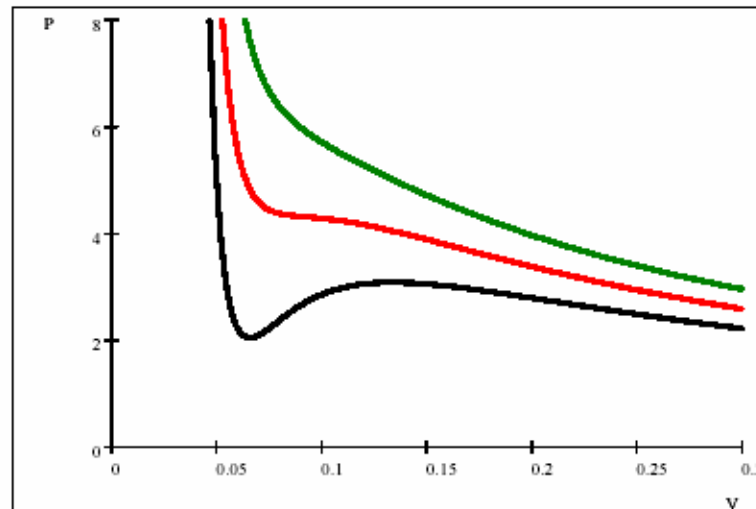
Reescribimos entonces VdW

Recordamos que :

$$v^3 - bv^2 + av/P = 0$$

$$P = \frac{nRT}{(V-nb)} - a\frac{n^2}{V^2}$$

$$y = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x^2}$$



Se observa que se pasa de tener 3 soluciones para T baja a una única solución para T alta.

Recordamos que :

El punto de transición entre estos dos comportamientos es para:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_{T=T_c} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \right|_{T=T_c} = 0$$

Para la primera derivada

$$P = \frac{RT_c}{v-b} - \frac{a}{v^2} \Rightarrow \frac{2}{v^3}a = \frac{RT_c}{(v-b)^2}$$

$$T_c = \left\{ \frac{2}{R} \frac{a}{v^3} (-b + v)^2 \right\}$$

Recordamos que :

la segunda derivada es $-\frac{6}{v^4}a + 2\frac{RT_c}{(v-b)^3} = 0$

de donde $T_c = \left\{ \frac{3}{R} \frac{a}{v^4} (-b + v)^3 \right\} \Rightarrow$

$$T_c = \left\{ \frac{2}{R} \frac{a}{v^3} (-b + v)^2 \left(\frac{3}{2} \frac{(-b+v)}{v} \right) \right\}$$

T_c según primer derivada

Se debe cumplir $\left(\frac{3}{2} \frac{(-b+v)}{v} \right) = 1$

de donde $v_c = 3b$

Ahora se obtiene

$$T_c = \left\{ \frac{2}{R} \frac{a}{(3b)^3} (-b + 3b)^2 \right\} = \frac{8}{27R} \frac{a}{b}$$

de donde

$$P_c = \frac{R \left(\frac{8}{27R} \frac{a}{b} \right)}{((3b)-b)} - a \frac{1}{(3b)^2} = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}$$

Recordamos que :

Luego Van der Waals se puede escribir

$$\left(\overline{P} + \frac{3}{\overline{v}^2}\right)(3\overline{v} - 1) = 8\overline{T}$$

donde $\overline{T} = \frac{T}{T_c}$, etc.

$$\left(\tilde{P} + \frac{3}{\tilde{V}^2} \right) (3\tilde{V} - 1) = 8\tilde{T}$$

Usamos estas transformaciones

$$p = \tilde{P} - 1 = \frac{(P-P_c)}{P_c}$$

$$v = \tilde{V} - 1 = \frac{(V-V_c)}{V_c}$$

$$\epsilon = \tilde{T} - 1 = \frac{(T-T_c)}{T_c}$$

en terminos de las cuales VdW puede ser reescrito como:

$$\left(1 + p + \frac{3}{(1+v)^2} \right) (3(1+v) - 1) = 8(1+\epsilon)$$


De donde, multiplicando a ambos lados por $(1 + v)^2$

$$[(1 + v)^2 + p(1 + v)^2 + 3][2 + 3v] = 8(1 + \epsilon)(1 + v)^2$$

Que toma la forma

$$2p(1 + 7v/2 + 4v^2 + 3v^3/2) = -3v^3 + 8\epsilon(1 + 2v + v^2)$$

A partir de esta expresion calculamos algunos de los exponentes criticos de VdW

1)El coeficiente δ asociado a la isoterma critica viene dado por

$$\frac{p - p_c}{p_c^0} \propto \left| \frac{p - p_c}{p_c} \right|^\delta \text{sign}(p - p_c) = \mathbb{C} \left| \frac{p - p_c}{p_c} \right|^\delta \text{sign}(p - p_c)$$

En $T = T_c$ (o sea en $\epsilon = 0$)

$$\left[(1+v)^2 + p(1+v)^2 + 3\right][1+3v] = 8(1+\varepsilon)(1+v)^2$$

izquierda

$$\begin{aligned} & \left[1+2v+v^2 + p + p2v + pv^2 + 3\right] + 3v\left[1+2v+v^2 + p + p2v + pv^2 + 3\right] \\ & 1+3+v[2+3+9]+ \end{aligned}$$

$$2p(1 + 7v/2 + 4v^2 + 3v^3/2) = -3v^3 + 8\epsilon(1 + 2v + v^2)$$

A partir de la ecuacion de VdW con $\epsilon = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} p &= -\frac{3}{2}v^3(1 + 7v/2 + 4v^2 + 3v^3/2)^{-1} \\ &= -\frac{3}{2}v^3(1 - 7v/2 + \dots) \end{aligned}$$

$$[v=(v-v_c)/v_c]$$

De donde

$$\delta = 3$$

Ademas

$$\frac{P - P_c}{P_c^0} = \frac{P_c}{P_c^0} \frac{P - P_c}{P_c} = \frac{3}{8} \left[-\frac{3}{2}v^3 \right] = \frac{-9}{16}v^3$$

donde se usa que $\frac{P_c V_c}{RT_c} = \frac{3}{8}$, a partir de las expresiones

para VdW en el punto critico.

$$P_c V_c / T_c R = (a / 27b^2)(3b)(27b / 8a) = 3/8$$

Luego

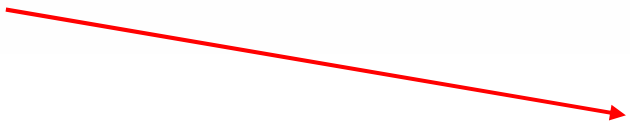
$$\mathbb{C} = \frac{9}{16}$$

2) Estudiamos ahora γ asociado a K_T .

Esto es, el comportamiento de K_T cuando $T \rightarrow T_c^+$ a lo largo de la isocora critica ($v = 0$)

$$(-VK_T)^{-1} = \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{P_c}{V_c} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T$$

donde usamos que



$$p = -\frac{3}{2}v^3(1 - 7v/2 + \dots) + \frac{8}{2}\epsilon(1 + 2v + v^2)(1 - 7v/2 + \dots)$$

Entonces

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{8}{2}\epsilon \left[\frac{\partial}{\partial v} (1 + 2v - \frac{7}{2}v + \dots) \right]_{v=0}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{8}{2}\epsilon(2 - 7/2) = -6\epsilon$$

Luego

$$(-VK_T)^{-1} = \frac{P_c}{V_c}(-6\epsilon)$$

De donde

$$\frac{K_T}{K_T^0} = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{6\epsilon} \right) = \frac{4}{9} \frac{1}{\epsilon}$$

(usando nuevamente la relacion entre P_c etc. para VdW)

Como habiamos propuesto

$$\frac{K_T}{K_T^0} = \mathbb{R} \epsilon^{-\gamma} (1 + \dots) ; T > T_c$$

$$\left[1/K_T^0 = P_c^0 = \frac{8}{3} P_c \right]$$

Entonces

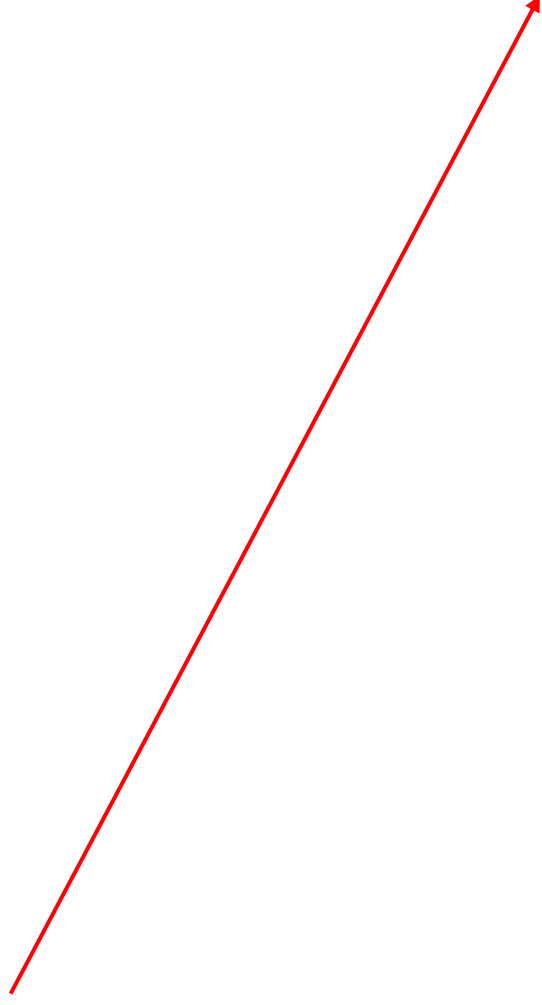
$$\gamma = 1$$

3) Del mismo modo se demuestra que para:

$$\frac{[\rho_l(T) - \rho_g(T)]}{2\rho_c} = Q \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta [1 + \dots]$$

$$\beta = \frac{1}{2} \quad Q = 2$$

Algunos exponentes críticos



	β	γ	δ
<i>fluidos</i>			
<i>CO₂</i>	0.34	1.35	4.2
<i>Xe</i>	0.35	1.3	4.4
<i>Mag</i>			
<i>Ni</i>	0.42	1.35	4.22
<i>VdW</i>	0.5	1	3

Exponentes críticos según la teoría de Landau

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \gamma' = 1$$

$$\delta = 3$$

$$\alpha = \alpha' = 0$$

Comparar con VdW !!!!!

Por ejemplo:

$$H(M, T) = \left(\frac{\partial A}{\partial M} \right) = 2\alpha_2 t m_0 + 4\alpha_4 m_0^3$$

Con $H = 0$ y m_0 pequeño

$$m_0 = M = \left[\frac{\alpha_2}{2\alpha_4} \right]^{1/2} (T_c - T)^{1/2}$$

Entonces

$$\beta = 1/2$$

Exponentes de Susceptibilidad

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T \Rightarrow (\chi_T)^{-1} = \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right)_T = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_T$$

Entonces

$$(\chi_T^{-1}) = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right) = 2\alpha_2 t + 12\alpha_4 m_0^2 = 2\alpha_2 t + 12\alpha_4 M^2$$

Si $T > T_c$ deberá ser $M=0$ si $H=0$,

Por lo tanto :

$$(\chi_T^{-1}) = 2\alpha_2 (T - T_c)$$

Como resultado $\gamma = 1$

Para el caso en que $T < T_c$, la magnetización debe ser > 0

Pero sabemos que $m_0 = M = \left[\frac{\alpha_2}{2\alpha_4} \right]^{1/2} (T_c - T)^{1/2}$

Reemplazamos en la expresión para $(\chi_T)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial M^2} \right)_T$

$$(\chi_T^{-1}) = 2\alpha_2 t + 12\alpha_4 M^2 = 2\alpha_2 (T - T_c) + 12\alpha_4 \left[\frac{\alpha_2}{2\alpha_4} \right] (T_c - T)$$

$$(\chi_T^{-1}) = 4\alpha_2 (T_c - T)$$

De donde el exponente critico es al igual que antes $\gamma' = 1$

Y por lo tanto $\gamma' = \gamma$

Desigualdades entre exponentes

Relaciones rigurosas entre diferentes exponentes han sido establecidas en base a analisis termodinamico.

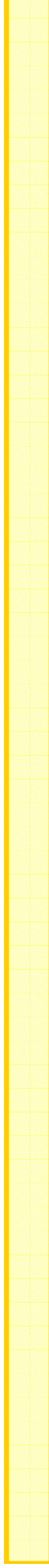
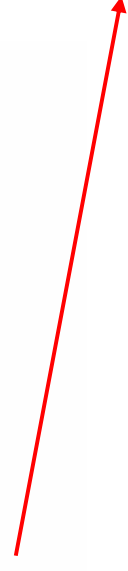
i) La desigualdad de Rushbrooke $\{H = 0, T \rightarrow T_c\}$

$$2 \leq \gamma' + 2\beta + \alpha'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma' \\ \gamma \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} C_H \propto (-\varepsilon)^{-\alpha} \\ C_H \propto \varepsilon^{-\alpha} \\ M \propto (-\varepsilon)^\beta \\ \chi_T \propto (-\varepsilon)^{-\gamma'} \\ \chi_T \propto \varepsilon^{-\gamma} \end{array}$$

Tomando en cuenta que C_M debe ser positivo y recordando que

$$\chi_T(C_H - C_M) = T\alpha_H^2$$



Para el caso de PVT
El calculo va por

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_w + \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_y \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

usando

$$K_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \text{ mult. por } T K_T$$

entonces

$$K_T (C_P - C_V) = -\frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

pero

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1$$

con

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$$

entonces

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

ahora

$$\alpha_P = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$K_T (C_P - C_V) = -\frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2$$

con

$$\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial H^2} \right)_T \quad \text{y} \quad \alpha_H = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H$$

Resultado para C_M

$$\chi_T C_H - T \alpha_H^2 = \chi_T C_M$$

entonces, para garantizar que $C_M \geq 0$

$$C_H \geq T \alpha_H^2 \frac{1}{\chi_T} = \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H^2 \frac{T}{\chi_T}$$

Pero sabemos que

$$C_H \sim (-\epsilon)^{-\alpha'} \quad \chi_T \sim (-\epsilon)^{-\gamma'} \quad \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_H \sim (-\epsilon)^{\beta-1}$$

$$\epsilon = \frac{T-T_c}{T_c}$$

Entonces reemplazando resulta:

$$(-\epsilon)^{-\alpha'} \geq (-\epsilon)^{\gamma'} (-\epsilon)^{2\beta-2}$$

Teniendo en cuenta el siguiente lemma

- i) si $f(x) \sim x^\lambda$ y $g(x) \sim x^\varphi$
- ii) si se cumple que $f(x) \leq g(x)$ para x pequeño y positivo.

entonces $\lambda \geq \varphi$

$(\log f(x) \leq \log g(x))$, si $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{\log f(x)}{\log x} \geq \frac{\log g(x)}{\log x}$, tomando el limite $x \rightarrow 0$ y usando la definicion de exponente critico resulta $\lambda \geq \varphi$)

De cuya aplicacion resulta $-\alpha' \leq \gamma' + 2\beta - 2 \Rightarrow$

$$2 \leq \gamma' + 2\beta + \alpha'$$

ii) Desigualdad de Griffiths

$$\alpha' + \beta(1 + \delta) \geq 2$$

(condiciones generales)

- 1) Sea $T = T_1 < T_c$
- 2) Sea M_1 la magnetizacion espontanea a campo 0 a T_1 .
 $M_1(T_1)$ debe anularse como $(T_c - T_1)^\beta$ con $T_1 \rightarrow T_c$
- 3) Sea $M < M_1$, $H = \left(\frac{\partial A}{\partial M}\right)_T$ pero como $H = 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial M}\right)_T = 0$$

(A es cte en estas condiciones)

de donde

$$A(T_1, M) = A(T_1, 0) , \text{ con } M \leq M_1(T_1)$$

Del mismo modo, dado que $\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T = -\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M$ de donde

$$S(T_1, M) = S(T_1, 0) , \text{ con } M \leq M_1(T_1)$$

Sean ahora (Atencion!)

$$\text{a) } A^*(T, M) = \{A(T, M) - A_c\} + (T - T_c)S_c$$

$$\text{b) } S^*(T, M) = S(T, M) - S_c$$

(Es 0 en $T=T_c$)

Con $A_c = A(T_c, M)$ y $S_c = S(T_c, M)$

De esta forma

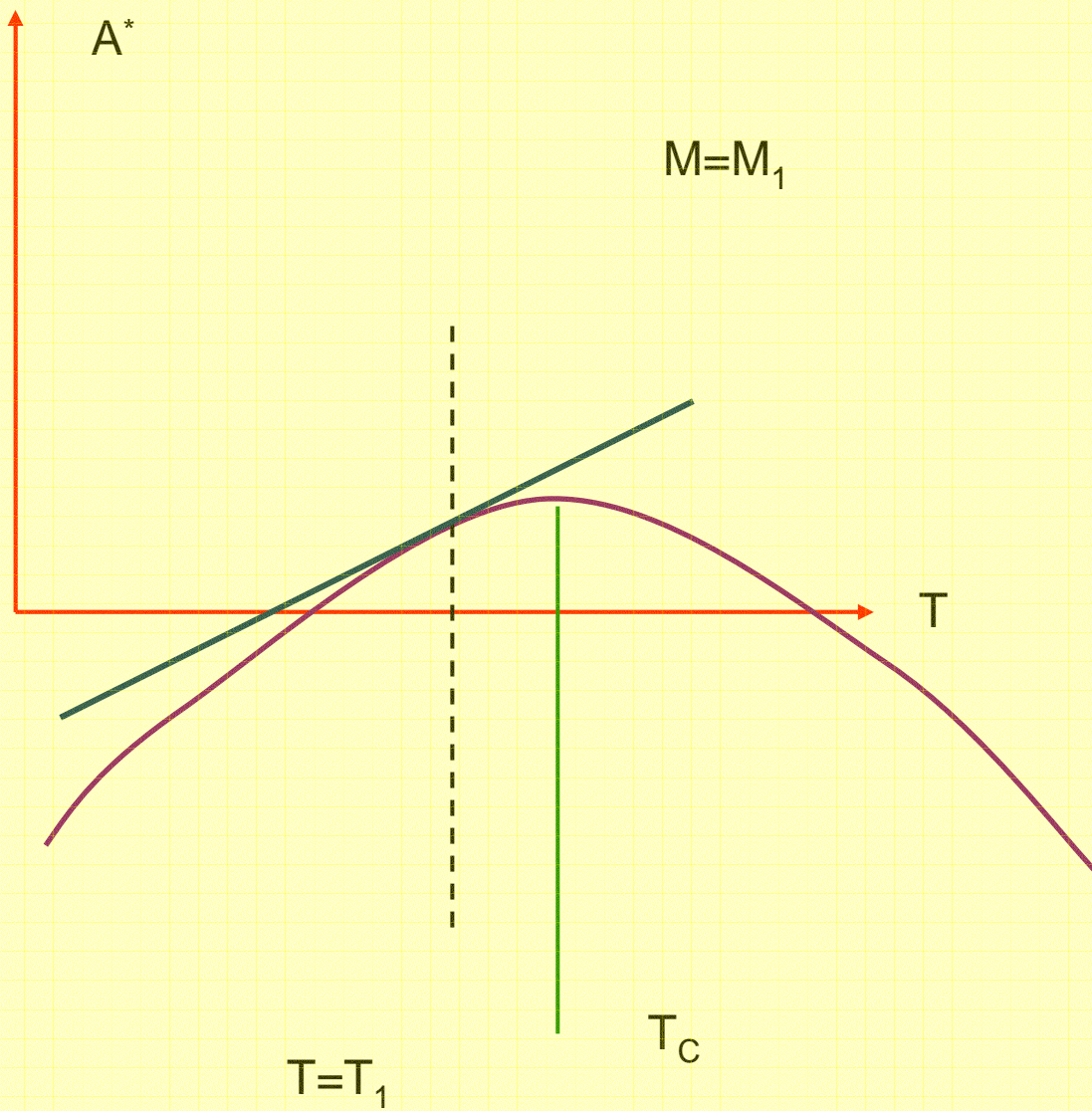
$$S^*(T, M) = - \left(\frac{\partial A^*}{\partial T} \right)_M$$

Se puede ver que A^* tiene las mismas propiedades de convexidad que A .

Si $T_1 < T_c$, sera $M_1(T_1)$ y consideramos $A^*(T, M)$ a M cte y $M = M_1$. (como antes)

La tangente a A^* en $T = T_1$ viene dada por la ecuacion:

$$f(T) = A^*(T_1, M_1) + (T - T_1) \left[\frac{\partial A^*}{\partial T} \right]_{T=T_1}$$



Como es concava todos los puntos de A^* (excepto el punto de tangencia) estan por debajo de $f(T)$.

En particular $A^*(T_c, M_1) \leq f(T)$ por lo que

$$A^*(T_c, M_1) \leq A^*(T_1, M_1) - (T_c - T_1)S^*(T_1, M_1)$$


o tambien

$$A^*(T_c, M_1) \leq A^*(T_1, 0) - (T_c - T_1)S^*(T_1, 0)$$

Ademas, por ser concava, $A^*(T_1, 0) < A^*(T_c, 0)$, (en T_c , $f(T)$ es horizontal)

Pero $A^*(T_c, 0) = 0$ por construccion. por lo tanto

$$A^*(T_1, 0) \leq 0$$

$$A^*(T, M) = \{A(T, M) - A_c\} + [T - T_c]S_c$$


$A^*(T_1, 0) \leq 0$ y podemos escribir

$$A^*(T_c, M_1) \leq -(T_c - T_1)S^*(T_1, 0)$$

Recordamos ahora que $H/H_c^0 \propto |M(T = T_0)/M(T = 0)|^\delta$ y por lo tanto $H \sim M^\delta$ y adem as $H = (\partial A^*/\partial M)_T$ integramos y escribimos

$$A^*(T_c, M_1) \sim M^{\delta+1} \sim (-\epsilon)^{\beta(\delta+1)} \sim (T_c - T_1)^{\beta(\delta+1)}$$

Por otro lado, para el calor específico se cumple:

$$\frac{C}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{M=0} \sim (T_c - T)^{-\alpha'}$$

de donde pensando la derivada como $(\Delta S/\Delta T)$

$$S^*(T_1, 0) = S(T_1, 0) - S(T_c, 0) \sim (T_c - T)^{1-\alpha'}$$

y reemplazando en $A^*(T_c, M_1) \leq -(T_c - T_1)S^*(T_1, 0)$;
entonces

$$A^*(T_c, M_1) \leq (T_c - T)^{2-\alpha'}$$

y ademas

$$A^*(T_c, M_1) \sim (T_c - T_1)^{\beta(\delta+1)}$$

usando el lemma \Rightarrow

$$\beta(\delta + 1) \geq 2 - \alpha'$$

SCALING

a) Funciones homogneas

$F(\lambda x)$ es homognea si para todo $\lambda \Rightarrow$

$$F(\lambda x) = g(\lambda)F(x)$$

[un ejemplo es la parabola,

$$f(x) = Bx^2 \Rightarrow f(\lambda x) = B\lambda^2 x^2 = \lambda^2 f(x) \Rightarrow g(\lambda) = \lambda^2]$$

La funcion $g(\lambda)$ sera de la forma λ^p , y p se llama *grado de la homogeneidad*

La forma de $g(\lambda)$ se debe a que:

$$F(\lambda \mu x) = g(\lambda \mu)F(x) = g(\lambda)F(\mu x) = g(\lambda)g(\mu)F(x) \Rightarrow$$

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu)$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mu} g(\lambda\mu) = \lambda g'(\lambda\mu) = g(\lambda)g'(\mu)$$

$$\text{Si } \mu = 1 \text{ y } g'(\mu) = p$$

$$\lambda g'(\lambda) = pg(\lambda)$$

$$\text{si } g(\lambda) = \lambda^p \Rightarrow g'(\lambda) = p\lambda^{(p-1)} = p\lambda^p/\lambda \text{ etc.}$$

$$g(\lambda) = \lambda^p$$

Entonces

$$F(\lambda x) = \lambda^p F(x)$$

Para dos variables

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda f(x, y)$$

si ahora defino $\lambda = y^{\frac{1}{q}}$

$$y^{\frac{1}{q}} f(y^{-\frac{p}{q}} x, 1) = f(x, y)$$

De donde la funcion homogenea de dos variables depende de (x, y) via $y^{-\frac{p}{q}} x$

Funciones homogeneas y transformadas de Legendre

Sea una funcion homogenea generalizada

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda f(x, y)$$

Sea la transformada de legendre de $f(x,y)$ respecto de x

$$g\{u(x,y),y\} = f(x,y) - xu(x,y)$$

con $u(x,y) = (\partial f / \partial x)_y$, de donde (derivando)

$$u(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda^{1-p} u(x,y)$$

Podemos escribir entonces

$$g\{u(\lambda^p x, \lambda^q y), \lambda^q y\} = f(\lambda^p x, \lambda^q y) - \lambda^p x u(\lambda^p x, \lambda^q y)$$

o tambien

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = g\{u(\lambda^p x, \lambda^q y), \lambda^q y\} + (\lambda^p x) u(\lambda^p x, \lambda^q y)$$

Usando las relaciones previas

$$\begin{aligned} g\{\lambda^{1-p}u(x,y), \lambda^q y\} &= \lambda f(x,y) - (\lambda^p x) \lambda^{1-p} u(x,y) \\ &= \lambda(f(x,y) - xu(x,y)) \\ &= \lambda g(x,y) \end{aligned}$$

o sea que $g(u,y)$ es una función homogénea generalizada con parámetros de escala $(1-p)$ y q

SCALING de Widom

La hipótesis de escalado estático establece que el potencial de Gibbs es una función homogénea generalizada y por lo tanto también lo serán los otros potenciales termodinámicos

Sea un sistema magnetico con campo externo presente

- 1) Sea el campo exterior B
- 2) Sea la energia libre g
- 3) Sea $\epsilon = \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right)$
- 4) Sea $g(T, B) = g_r(T, B) + g_s(\epsilon, B)$

Donde $g_s(\epsilon, B)$ es la parte singular, que asumimos es de la forma

$$g_s(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B) = \lambda g_s(\epsilon, B)$$

- i) La magnetizacion $M(\epsilon, B = 0) \sim (-\epsilon)^\beta$

Como suponemos que es homogenea \Rightarrow y la magnetización esta asociada a la derivada respecto de B

$$\lambda^q M(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B) = \lambda M(\epsilon, B)$$

Sea ahora $\lambda = (-\epsilon)^{-1/p} \Rightarrow$

$$(-\epsilon)^{-q/p} M(-1, (-\epsilon)^{-q/p} B) = (-\epsilon)^{-1/p} M(\epsilon, B)$$

Si ahora $B = 0$

$$(-\epsilon)^{(1-q)/p} M(-1, 0) = M(\epsilon, 0)$$

de donde $\beta = \frac{1-q}{p}$

ii) Del mismo modo para la susceptibilidad magnetica

$$\chi = -\left(\frac{\partial^2}{\partial B^2} g\right)$$

Que debe comportarse como $(-\epsilon)^{-\gamma}$

Si diferenciamos $\lambda^q M(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B) = \lambda M(\epsilon, B)$ con respecto de B

$$\lambda^{2q} \chi(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B) = \lambda \chi(\epsilon, B)$$

Sea entonces $B = 0$ y se escribe $\lambda = (\epsilon)^{-1/p} \Rightarrow$

$$(\epsilon)^{(1-2q)/p} \chi(1, 0) = \chi(\epsilon, 0) \quad \gamma = (1-2q)/p$$

Del mismo modo se obtiene $\gamma = \gamma'$

iii) El calor específico

$$C_B = -T \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2} \right)_B \sim (\epsilon)^{-\alpha}$$

$$g_s(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B) = \lambda g_s(\epsilon, B)$$

$$\text{con } \epsilon = \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)$$

$$\lambda^{2p} C_B(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B) = \lambda C_B(\epsilon, B)$$

$$\text{con } B = 0 \text{ y } \lambda = \epsilon^{-1/p}$$

$$(\epsilon^{-1/p})^{2p} C_B(1, 0) = \epsilon^{-1/p} C_B(\epsilon, 0)$$

$$(\epsilon^{(1-2p)/p})C_B(1,0) = C_B(\epsilon,0)$$

de donde

$$\alpha = 1 - 1/p$$

y así siguiendo, luego **todos los exponentes críticos están dados conociendo p y q .**

De este modo la hipótesis de escala no determina los valores de los exponentes críticos sino que todos se expresan en términos de p y q . Pero conocidos dos exponentes críticos quedan determinados y por lo tanto ...

c) Relación entre fluctuaciones y susceptibilidades

$$\hat{\mathbf{m}}(r) = \mu \sum s_i \delta(q_i - r)$$

La magnetización será

$$\hat{M} = \int dr \hat{\mathbf{m}}(r)$$

En presencia de un campo exterior que llamamos $\mathbf{B}(r)$ (por H)

$$H = H_0 - \int dr \hat{\mathbf{m}}(r) \cdot \mathbf{B}(r)$$

La magnetizacion media es

$$\langle \hat{M} \rangle = \frac{\text{Tr} \left[\frac{\exp(-bH)\hat{M}}{\text{Tr}[\exp(-bH)]} \right]}{\text{Tr}[\exp(-bH)]}$$

Entonces la susceptibilidad sera

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\alpha'} &= \left(\frac{\partial \langle \hat{M}_\alpha \rangle}{\partial B_{\alpha'}} \right) = \beta \left(\langle \hat{M}_\alpha \hat{M}_{\alpha'} \rangle - \langle \hat{M}_\alpha \rangle \langle \hat{M}_{\alpha'} \rangle \right) = \\ &= \beta \left\langle \left(\hat{M}_\alpha - \langle \hat{M}_\alpha \rangle \right) \left(\hat{M}_{\alpha'} - \langle \hat{M}_{\alpha'} \rangle \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Sea $\delta \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{r})$ la fluctuacion de densidad de magnetizacion

$$\chi_{\alpha\alpha'} = \beta \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \langle \delta \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{r}_1) \delta \mathbf{m}_{\alpha'}(\mathbf{r}_2) \rangle$$

$$C_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \delta \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{r}_1) \delta \mathbf{m}_{\alpha'}(\mathbf{r}_2) \rangle$$

Introduciendo coordenadas relativas

$$C_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) = \langle \delta \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{r}) \delta \mathbf{m}_{\alpha'}(\mathbf{0}) \rangle$$

luego

$$\chi_{\alpha\alpha'} = \beta V \int d\mathbf{r} C_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r})$$

Introduciendo la transformada de Fourier (se llama el factor de estructura)

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}) &= \int_V d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) C_{\alpha\alpha'}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r}_1 \int_V d\mathbf{r}_2 \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) \langle \delta \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{r}_1) \delta \mathbf{m}_{\alpha'}(\mathbf{r}_2) \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{V} \langle \delta \mathbf{m}_\alpha(\mathbf{k}) \delta \mathbf{m}_{\alpha'}(-\mathbf{k}) \rangle$$

Comparando $G_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k})$ con $\chi_{\alpha\alpha'} \Rightarrow$

$$\chi_{\alpha\alpha'} = \beta V G_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k} = \mathbf{0})$$

O sea que la susceptibilidad estática está asociada con las fluctuaciones de densidad de longitud de onda muy larga. Pero en el punto crítico la susceptibilidad diverge, luego las correlaciones se hacen de rango muy largo.

Statistical Mechanics of phase transitions
J.M.Yeomans

The Theory of Critical Phenomena
J.J.Binney, N.J. Dowrick, A.J.Fisher, M.E.J.Newman

Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena
H. Eugene Stanley

Critical Phenomena in Natural Sciences
D. Sornette

Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group
N. Goldenfeld