Física Teórica 3 – 2do. cuatrimestre de 2014

Combinatoria, probabilidades, información y entropía

I. Combinatoria

1. (a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar 5 personas en hilera para sacarse una foto?

   (b) ¿De cuántas formas si A y B quieren salir juntos (uno al lado del otro)?

2. ¿Cuántas palabras de 3 letras (que tengan o no sentido) se pueden formar con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*? (a) sin repetir letras, (b) sin importar si se repiten letras.

3. Se llama anagrama de una palabra a toda permutación de sus letras, de modo que el resultado puede tener o no sentido. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra MANZANA?

4. Para un torneo de ping pong se anotaron 6 personas. ¿Cuántos partidos se van a jugar si todos tienen que jugar entre sí?

5. Hay N libros y M cajas. Cada caja puede contener hasta N libros, apilados uno sobre el otro. Cuántas maneras hay de acomodar los libros en las cajas si:

   (a) Los libros son todos iguales y las cajas todas distintas.

   (b) Los libros y las cajas son todos distintos.

   (c) Los libros y las cajas son todos iguales.

   (d) Los libros son todos distintos y las cajas todas iguales.

II. Probabilidades

1. Se lanza una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?

2. Se lanza un dado cúbico, con las caras numeradas de 1 a 6.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga 6?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?

3. Volviendo al problema 1. Si las 5 personas se ordenan al azar, ¿cuál es le probabilidad de que A y B salgan juntos?

4. Sabemos que el número de teléfono de Juan tiene 8 dígitos: dos 3, tres 1, dos 0 y un 9, y no empieza con 0. ¿Cuál es la probabilidad de que en un llamado nos comuniquemos con Juan?

5. Se lanzan 10 dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres 6?

6. Una bacteria tiene probabilidad p de reproducirse en un intervalo de tiempo. Si hay 5 bacterias, calcule la probabilidad de que sólo 2 se reproduzcan en ese intervalo.

7. En un partido de truco que dura 15 manos entre 4 jugadores, encuentre la probabilidad de que a un dado jugador nunca le toque el ancho de espadas, y de que el ancho de espadas no salga en todo el partido.

8. **Probabilidad Condicional.** Se lanza un dado de 8 caras, numeradas del 1 al 8.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga 5?

(b) Si le digo que salió un número impar. ¿Cuál es la probabilidad de que ese número sea 5?

9. La urna A tiene 7 bolas blancas y 3 negras, y la urna B, 5 blancas y 5 negras. Se extrae al azar una bola de A y se la coloca en B. A continuación se extrae al azar una bola de B. Encuentre la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean negras. Sugerencia: En vez de intentar enumerar todas las posibilidades, es mejor definir los sucesos A y B como "bola extraída de A es negra" y "bola extraída de B es negra", respectivamente. Calcular $P(A)$, $P(A|B)$, y luego obtener $P(A \bigcap B)$.

10. **El problema del cumpleaños.** En un aula hay n personas. Considerando, para simplificar, que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es $1/365$, y que las fechas de los cumpleaños de las n personas son estadísticamente independientes:

    (a) ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad $p(n)$ de que al menos dos cumplan años el mismo día supere el 50%? Grafique $p(n)$ con la ayuda de algún programa.

    (b) Una expresión aproximada de $p(n)$ puede obtenerse si se analizan las personas de a pares. i) Calcule la probabilidad de que un dado par de personas no cumpla años el mismo día. ii) Calcule cuántos pares pueden formarse entre n personas. iii) Si se asume que cada evento de la forma "A y B no cumplen años el mismo día" (al que notaremos como AB), es independiente de todos los otros, encuentre la probabilidad de que ningún par de personas cumpla años el mismo día, y de ahí obtenga $p_{\rm aprox}(n)$. ¿En dónde entra la aproximación? Grafique $p_{\rm aprox}(n)$ y compare con la solución exacta.

    (c) En verdad, no todos los eventos de la forma "A y B no cumplen años el mismo día" son independientes entre sí. Para ver eso en un caso sencillo, suponga que hay 3 personas, M, L y C, y calcule $P(ML, MC, LC)$, $P(ML, MC)$, $P(ML|MC)$ y $P(ML|MC, LC)$.

11. **Falso positivo.** Aparece una nueva enfermedad, 100% fatal aunque extremadamente rara, estimándose que se da en 1 de cada 1000 millones de personas. Sus síntomas son imperceptibles, hasta que, eventualmente, la cabeza explota. Por suerte, se descubre un test de diagnóstico prácticamente infalible: la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser ensayado en una persona sana es de 1 en un millón, lo que se conoce como un *falso positivo*. Existe una probabilidad igual de que el test falle al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad.

    (a) Una persona se hace el test y le da positivo. Teniendo en cuenta que el test falla en un caso de cada un millón, ¿debe desahuciarse a la persona o darle alguna esperanza? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad? (*Sugerencia:* el hecho de formular esta pregunta indica que la respuesta no es "1 en un millón".)

    (b) Si a una persona el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?

    (c) Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.

12. **Variables aleatorias.** Calcule la media y la varianza de las variables aleatorias descriptas por las siguientes distribuciones de probabilidad:

    (a) Uniforme discreta: $P(n) = \frac{1}{N}$; con $1 \leq n \leq N$, números enteros.

(b) Binomial: $P(n) = \binom{N}{n} p^n \left(1-p\right)^{N-n}$; con $n, N \in \mathbb{N}$ y $p < 1$.

(c) Uniforme continua: $f(x) = 1/L$; con $x \in [0, L]$.

(d) Exponencial: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; con $x, \lambda \geq 0$.

(e) Gaussiana: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

III. Información y Entropía

1. En Teoría de la Información, la entropía se define como

$$S = -\sum_{r=1}^{M} p(r) \log p(r),$$

donde $p(r)$ es la probabilidad del estado r, entre M posibles. A mayor entropía mayor es la incertidumbre antes de conocer el estado de un sistema, y entonces mayor es la información que se gana al conocerlo.

(a) Graficar $x \log x$ en el intervalo $\overline{0, 1}$. ¿Qué pasa con S cuando uno de los estados ocurre con probabilidad 1?

(b) Demostrar que S es no negativa y que es máxima cuando todos los estados tienen igual probabilidad, $p(r) = 1/M$. *Sugerencia:* que hay un extremo es fácil; demostrar que es un máximo es más difícil. Las dos cosas pueden hacerse en un solo paso usando la llamada desigualdad de Jensen, de la teoría de funciones convexas. Si Φ es continua y convexa, entonces

$$\Phi\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} a_k\right) \leq \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Phi(a_k).$$

(Es fácil entender esta desigualdad si se piensa a $\Phi(x)$ como la función que define la coordenada y de cierto arco convexo, con una distribución de masas unidad sobre el arco y cuyas coordenadas x son las cantidades a_k. La desigualdad dice que el centro de masa está *dentro* del arco, lo que es bastante intuitivo; Callen, §17-1.)

2. Calcular la entropía para las distribuciones de probabilidad del problema 12. Note que para las variables continuas debe reemplazar la sumatoria sobre estados r en la definición de entropía por una integral sobre el soporte de la variable. En ese caso se la llama "Entropía Diferencial".

3. **Principio de Máxima Entropía**. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre la distribución de probabilidades de Máxima Entropía de una variable aleatoria si conoce

(a) $\langle x \rangle = \mu$

(b) $\langle x \rangle = \mu$ y $\mathrm{Var}(x) = \left\langle (x-\mu)^2 \right\rangle = \sigma^2$

4. Se observa que en un dado cargado el número 6 sale el doble de veces que el número 1. No se observa nada raro para las otras caras. ¿Cuáles son las probabilidades $p_m (1 \leq m \leq 6)$ que maximizan la entropía? (Ejercico 4h de Balian)