Física Teórica 3 − 2do. cuatrimestre de 2014 − Primer parcial

- Problemas en hojas separadas.
- Lea los enunciados más de una vez. Asegúrese de resolver el problema que se le pide.
- Por lo que más quiera, use letra clara y **sea breve**. Escriba en limpio lo esencial. El resto puede entregarse como borrador.
- Justifique sus respuestas.

1. Un gas ideal clásico bidimensional está formado por $N \gg 1$ partículas atrapadas en un potencial armónico isótropo $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$. Las partículas tienen masa m. El sistema no intercambia trabajo. Usando el ensamble microcanónico, se pide encontrar:

   (a) La entropía $S(U, N)$.

   (b) La energía interna $U(T, N)$ y el calor específico, relacionándolo con el principio de equipartición.

   (c) Usando el principio de equipartición, ¿cuál es, como función de T, el valor medio de r^2 para una partícula del gas?

   (d) ¿Cuál es el área característica del sistema como función de T? Con este resultado a la vista: ¿es extensiva la entropía del sistema?

2. Considere una superficie adsorbente en contacto con un gas ideal diatómico. La superficie tiene $2M$ sitios, cada uno de los cuales puede adsorber una molécula de gas como máximo. Los sitios adsorbentes no son todos iguales, sino que la mitad de ellos (sitios A) poseen una energía de adsorción $-W$, y la otra mitad (sitios B) $-2W$. El gas es diatómico y heteronuclear. La masa de las moléculas es m, $\nu_{\text{rot}} = 10$ cm^{-1} y $T_{\text{vib}} = 6000$ K (tener en cuenta que $hc/k_B \simeq 1.4$ K cm). Las moléculas adsorbidas y el gas se encuentran en equilibrio entre sí a temperatura T.

   (a) Encuentre la energía media de las moléculas adsorbidas en función de T y del potencial químico.

   (b) Encuentre el potencial químico del gas en función de T y de su presión P para temperaturas de alrededor de 500 K.

   (c) Halle el número medio total de moléculas adsorbidas en los sitios A y B en función de T y de la presión P del gas para temperaturas de alrededor de 500 K.

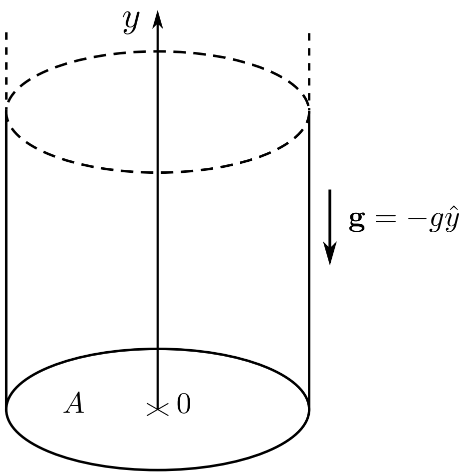
3. Un gas de N fermiones no interactuantes de masa m y de espín s se encuentra confinado dentro de un cilindro. El cilindro tiene altura infinita y el área de su base es A. La base del cilindro está en $y = 0$. En la dirección del eje del cilindro actúa un campo gravitatorio uniforme de aceleración $\mathbf{g} = -g\hat{y}$, con $g > 0$. El gas está a $T = 0$. Usando la aproximación semiclásica para la densidad de estados en el espacio de fases:

   (a) Encuentre la energía de Fermi.

   (b) ¿Cuál es la altura máxima y_{max} que alcanzan las partículas dentro del cilindro?

   (c) Encontrar la ecuación que determina la fugacidad $z = e^{\beta\mu}$ cuando $T > 0$. (Esta ecuación puede escribirse exactamente en términos de las funciones f_ν.)

   (d) Encontrar la primera corrección no nula al potencial químico μ cuando $T > 0$.



Problema 3

Algunas fórmulas que pueden ser útiles:

$$dU = TdS - PdV + \mu dN, \qquad dF = -SdT - PdV + \mu dN,$$
$$dG = -SdT + VdP + \mu dN, \qquad dH = TdS + VdP + \mu dN.$$

$$\int_{|\mathbf{x}|^2 < C} d^d x \; = \; \frac{\Omega_d \, C^{d/2}}{d} = \frac{\pi^{d/2} C^{d/2}}{\left(\frac{d}{2}\right)!}.$$

$$\ln(N!) \simeq N \ln N - N, \qquad N \gg 1.$$

Espectro del rotor rígido: $\varepsilon_l = \dfrac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$. Temperatura de rotación: $k_B \Theta_{\text{rot}} \equiv \dfrac{\hbar^2}{2I}$.

$$\int \frac{d^3 p}{h^3} \, e^{-\beta p^2/2m} = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} = \frac{1}{\lambda^3}.$$

Aproximación semiclásica: $\displaystyle\sum_{\text{estados de 1 part.}} F(\epsilon) \to \int \frac{d^3 r \, d^3 p}{h^3} \, F\big(\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})\big).$

$$\int_0^\infty dx \; F(x) \, \Theta(x_0 - x) = \Theta(x_0) \int_0^{x_0} dx \; F(x).$$

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \, \frac{x^{\nu-1}}{1 + z^{-1} e^x}, \qquad f'_\nu(z) = \frac{f_{\nu-1}(z)}{z}, \qquad f_\nu(0) = 0.$$

$$f_\nu\left(e^{\beta\mu}\right) \simeq \frac{(\beta\mu)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[1 + \nu(\nu-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(\beta\mu)^2} \right], \qquad \text{cuando } \; \beta\mu \gg 1.$$

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu) = \nu!, \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$