Física Teórica 3 – 2do. cuatrimestre de 2014

Guía 10: *Ecuaciones de Langevin, movimiento Browniano y Fokker Planck*

1. **Teorema de Nyquist**

   (a) Escriba la ecuación de *Langevin* para un circuito eléctrico con autoinducción L.

   (b) Relacione la amplitud espectral del ruido térmico en un circuito con la resistencia y la temperatura.

2. Se observa el movimiento *Browniano* de partículas de radio $4 \times 10^{-5} cm$, sumergidas en un líquido de viscosidad $\eta = 0.0278 g\, cm^{-1} s^{-1}$, a una temperatura de $18.8\, ^oC$. El valor observado de $\langle x^2 \rangle$ en un intervalo de de $10s$ es $3.3 \times 10^{-8} cm^2$. Determine a partir de estos datos la constante de Boltzmann k_B.

3. **Movimiento Browniano de una partícula libre**
   Considere el movimiento Browniano unidimensional de una partícula en ausencia de fuerzas externas. Se desea hallar la evolución de su distribución de velocidades $P(v,t)$ sabiendo que en el instante inicial la velocidad de la partícula es v_0, o sea $P(v,0) = \delta(v - v_0)$.
   Ayuda: intente llevar la ecuación de Fokker-Planck a la forma de una ecuación de difusión

   $$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = C \frac{\partial^2 Q}{\partial u^2},$$

   a través de cambio $P(v,t) = \exp(\gamma t) Q(u,t)$; $u = v \exp(\gamma t)$ definiendo la nueva escala de tiempo,

   $$\theta = \left[\exp(2\gamma t) - 1\right] / 2\gamma$$

   con $\gamma = \alpha/m$, $\alpha =$ constante de rozamiento, $m =$ masa de la partícula.

4. **Movimiento Browniano de un oscilador en alta fricción**
   Halle la evolución de la función de distribución correspondiente a la elongación de un oscilador que efectúa movimiento Browniano en un medio de alta fricción a temperatura T. Resuelva para una condición inicial arbitraria $P(x, t = 0)$ y en particular si $P(x, t = 0) \sim (y-1)^2 \exp(-y^2)$; $y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2k_B T}} x$.
   Ayuda: tenga en cuenta que es muy fácil escribir $(y-1)^2$ a través de los polinomios de *Hermite*.

5. La ecuación de Langevin para una partícula de masa M en movimiento Browniano, la cual se halla sometida a una fuerza restauradora $-\lambda x$, es de la forma:

   $$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{B} \frac{dx}{dt} + \lambda x = F(t)$$

   (a) Halle a partir de esta ecuación expresiones para los valores medios de $\langle x^2(t) \rangle$ y $\langle v^2(t) \rangle$

   (b) Compruebe además que para $\lambda = 0$ se reproduce la situación del problema 3, mientras que para $M \to 0$ se tiende a las condiciones del problema 4.

6. **Movimiento Browniano de un rotador en alta fricción**
   Sea un rotador de masa m es decir, una varilla de masa despreciable que tiene uno de sus extremos fijo y en el otro una masa m que se mueve así libremente sobre una superficie esférica de córdenadas (θ, φ). Suponga que este rotador se halla inmerso en un medio de alta constante de fricción y a temperatura T.

(a) Halle la evolución de la función de distribución de las córdenadas del rotador $P(\theta, \varphi, t)$.

(b) Compare el espectro de frecuencias de relajación de este problema con el espectro del observable L^2(momento angular de la mecánica cuántica).