Cuanticos II

侍

Condiciones periodicas de contorno

$$\boxed{\Psi(x,y,z) = \Psi(x+a,y,z) = \Psi(x,y+b,z) = \Psi(x,y,z+c)}$$

Resulta

$$\Psi_{lmn}(\mathbf{r}) = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

con

$$k = \left(\frac{l}{a}, \frac{m}{b}, \frac{n}{c}\right)$$

con $l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Si uno calcula la densidad de estados para estos casos
(calcular el numero de puntos del lattice)

$$g(k) = \sum_{l,m,n}^{\prime} f^*(l,m,n)$$

Con $f^*(l,m,n) = 1$ si l,m,n se dan en la region y satisfacen

$$\left(\frac{l^2}{a^2}, \frac{m^2}{b^2}, \frac{n^2}{c^2}\right) \leq \frac{k^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{4}\right)_{pbc}$$

En este caso

$$g(k) \propto V$$

Microcanónico cuántico, gas ideal

$$H = \sum_{i=1,N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\sum \nabla_i^2\right)$$

Tenemos que estudiar bosones, fermiones y boltzmanniones

Tenemos que calcular Γ

Los autovalores de la energia delsistema de N particulas es la suma de los posibles valores de energia de 1 particula (niveles)

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$$

donde $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{n}$; donde $\vec{n}$ tiene componentes $0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ un estado del sistema $\Rightarrow \{n_{\vec{p}}\}$ conjunto de numeros de ocupacion que deben cumplir:

$$\boxed{E = \sum_{\vec{p}} e_{\vec{p}} n_{\vec{p}} \quad N = \sum_{\vec{p}} n_{\vec{p}}}$$

Dejando de lado el spin

bosones $\Rightarrow n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \ldots.$

fermiones $\Rightarrow n_{\vec{p}} = 0, 1$

boltzmann $\Rightarrow n_{\vec{p}} = 0, 1, 2, \ldots.,$ pero $\{n_{\vec{p}}\} \rightarrow \frac{N!}{\prod_{\vec{p}} (n_{\vec{p}}!)}$ por

distinguibilidad, pero ademas hay que tener en *cuenta* el factor de buen conteo de Boltzmann.

i) Sea el espectro definido por $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$

ii) Agrupamos niveles contiguos en celdas i

iii) cada celda i tiene g_i niveles

iii) cada celda i tiene asociado un ε_i

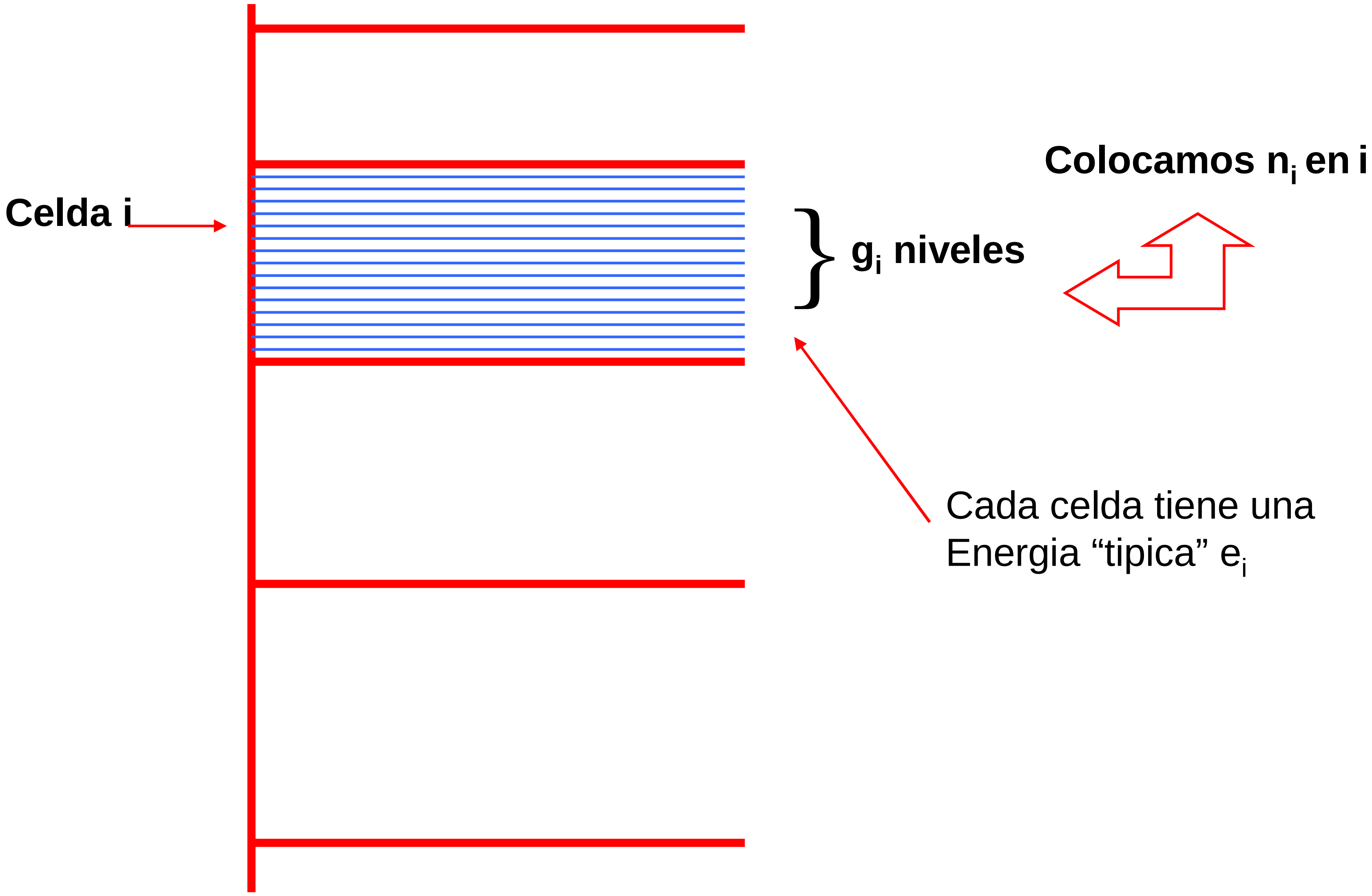
iv) cada celda i tiene asignado un numero de ocupacion n_i

Dada una energia E

$$\boxed{E = \sum_i e_i n_i \quad N = \sum_i n_i}$$

Entonces sea $\Omega\{n_i\} \longrightarrow$ el numero de estados asociados a $\{n_i\}$

$$\boxed{\Gamma = \sum_{\{n_i\}} \Omega\{n_i\}}$$


Celda i
Colocamos n_i en i
g_i niveles
Cada celda tiene una
Energia "tipica" e_i

Bose

$\Omega\{n_i\} = \prod_j \omega_j$, donde ω_j es elnumero de formas de distribuir n_j en la celda j

Para bosones cada uno de los g_i niveles de la celda i puede tener cualesquiera numero de particulas.

una celda esta definida por dos paredes

las g_i subceldas donde se distrbuyen n_i particulas requieren $(g_i - 1)$ paredes extra.

Entonces todas las posibles configuraciones seran las permutaciones de $n_i + (g_i - 1)$ elementos

$$\boxed{\begin{gathered}\omega_i = \frac{[n_i + (g_i - 1)]!}{n_i!(g_i - 1)!} \\ \Omega_{bose}\{n_i\} = \prod_i \omega_i = \prod_i \frac{[n_i + (g_i - 1)]!}{n_i!(g_i - 1)!}\end{gathered}}$$

Fermi

como antes

$$\Omega\{n_i\} = \prod_j \omega_j$$

dado $n_i \Rightarrow n_i$ debe ser $\leq g_i$, si $n_i = g_i \Rightarrow \omega_i = 1$

Tengo que calcular todas las formas de seleccionar n_i niveles de g_i niveles $\Rightarrow$

$$\boxed{\omega_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}}$$

de donde

$$\boxed{\Omega_{fermi}\{n_i\} = \prod_i \omega_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}}$$

Boltzmann

Las particulas son distinguibles

i) hay que distribuir las N particulas en las celdas, con n_i en la celda $i \Rightarrow N!/\prod(n_i!)$

ii) las n_i se distribuyen en las g_i en $g_i^{n_i}$

iii) aplicamos el factor de buen conteo de Boltzmann ($\frac{1}{N!}$)

entonces

$$\Omega_{boltzmann}\{n_i\} = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

Gas ideal en el GC

en el GC tenemos

$$\Xi(z,V,T) = \sum_{N=0} z^N Q_N(V,T)$$

$$\langle O\rangle = \frac{1}{\Xi}\sum_{N=0} z^N \langle O\rangle_N$$

o tambien

$$\Xi(z,V,T) = Tr\exp\left[-\beta\left(\hat{H} - \mu N\right)\right]$$

Entonces planteamos el Q_N

$$Q_N = \sum_{\{n_{\mathbf{p}}\}} g\{n_{\mathbf{p}}\} e^{-\beta E\{n_{\mathbf{p}}\}}$$

Donde $g\{n_{\mathbf{p}}\}$ es la "degeneracion" del nivel $\{n_{\mathbf{p}}\}$ ("combinatorial")

Donde $\{n_{\mathbf{p}}\}$ es el conjunto de numeros de ocupacion de los niveles $\mathbf{p}$ con

$$\boxed{E\{n_{\mathbf{p}}\} = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}} \text{ y } \boxed{N = \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}}$$

Que forma adoptan estas expresiones cuando particularizamos para los $\neq$ "tipos" de particulas que hemos definido?

$$\begin{array}{ll} Bose & n_{\mathbf{p}} = 0,1,2,3,.. \\ Boltzmann & n_{\mathbf{p}} = 0,1,2,3,\ldots \\ Fermi & n_{\mathbf{p}} = 0,1 \end{array}$$

<u>Para los $g\{n_{\mathbf{p}}\}$</u>

Para los $g\{n_{\mathbf{p}}\}$

$$
\boxed{\begin{array}{ll}
\textit{Bose} & 1 \\
\textit{Boltzmann} & \frac{1}{N!}\left[\frac{N!}{\prod n_{\mathbf{p}}!}\right] \\
\textit{Fermi} & 1
\end{array}}
$$

Donde para el caso de Boltzmann primero distribuimos en los niveles , importando en que celda van, pero no las permutaciones dentro de cada celda y luego "indistinguibilizamos"

Calculo de Q_N

Debemos calcular la funcion de particion

$$Q_N(V,T) = \sum_E e^{-\beta E}$$

Sabemos que la energia se expresa en terminos de los niveles de energia $\epsilon \Rightarrow E = \sum_p n_p \epsilon_p$, donde se cumple $\sum_p n_p = N$ pues el numero de particulas esta fijo.

Usando los conjuntos de numeros de ocupacion $\{n_p\}$ para denotar el estado y la degeneracion de los mismos por

$$\boxed{g\{n_p\}}$$

Recordar que no estamos sumando sobre energias sino sobre los autoestados!!!!

$$\boxed{Q_N(V,T) = \sum_{\{n_p\}} g\{n_p\} e^{-\beta \sum n_p \epsilon}}$$

Sabemos que $g\{n_\epsilon\} = 1$ para Fermi y para Bose

En el caso de Boltzmann $g\{n_\epsilon\} = \frac{1}{N!} \frac{N!}{\prod n_\epsilon !}$

Caso Boltzmann

$$Q_N(V,T) = \sum_{\{n_\epsilon\}} g\{n_p\} e^{-\beta \sum n_p \epsilon}$$

reemplazando $g\{n_\epsilon\} = \frac{1}{N!} \frac{N!}{\prod n_p!}$ resulta

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{N!} \sum_{\{n_p\}} \frac{N!}{\prod n_p!} e^{-\beta \sum n_p \epsilon}$$

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{N!} \sum_{\{n_\epsilon\}} \frac{N!}{\prod n_p!} \prod [e^{-\beta\epsilon}]^{n_p}$$

$$Q_N(V,T) = \frac{1}{N!}\sum_{\{n_\epsilon\}} \frac{N!}{\prod n_p!} \prod [e^{-\beta\epsilon}]^{n_p}$$

Pero tomando en cuenta que

$$\left\{ \begin{array}{c} multinomial \\ (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)^n = \displaystyle\sum_{n_1+n_2+\ldots=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots \end{array} \right\}$$

Resulta

$$\boxed{Q_N = \frac{1}{N!}\left[\sum_\epsilon e^{-\beta\epsilon}\right]^N = \frac{1}{N!}[Q_1(V,T)]^N}$$

$$\sum_{\mathbf{p}} \exp(-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}) = \frac{V}{h^3}\int_0^\infty dp 4\pi p^2 e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} = V\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{N}\log Q_N = \log\left[\frac{V}{N}\left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}$$

Que es esto?

Los autoestados de la particula libre en un recinto de volumen V

$$\vec{p} = \frac{2\pi\hbar\vec{n}}{L}$$

Entonces esto forma una red cubica en el espacio de momentos con Un paso

$$\frac{2\pi\hbar}{L} = \frac{2\pi\hbar}{V^{1/3}} = \frac{h}{V^{1/3}}$$

Que se va a 0 con V a infinito

En este limite un elemento de volumen dp³ contiene $\frac{V}{h^3} d^3 p$ **puntos**

Luego es posible hacer: $\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3 p$

Bose y Fermi

(lo resolvemos en el GC directamente para obviar el problema de la condicion sobre N)

$$\Xi(z,V,T) = \sum_{N=0} z^N Q_N(V,T) = \sum_{N=0} z^N \sum_{\substack{\{n_{\mathbf{p}}\} \\ N=\Sigma n_{\mathbf{p}}}} e^{-\beta \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}}$$

$$= \sum_{N=0} \sum_{\substack{\{n_{\mathbf{p}}\} \\ N=\Sigma n_{\mathbf{p}}}} \prod (z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}})^{n_{\mathbf{p}}}$$

Se ve que:

$$= \sum \sum \ldots [(z e^{-\beta \varepsilon_0})^{n_0} (z e^{-\beta \varepsilon_1})^{n_1} \ldots] = \sum (z e^{-\beta \varepsilon_0})^{n_0} \sum (z e^{-\beta \varepsilon_1})^{n_1} \sum$$

$$= \prod_{\mathbf{p}} \sum_n (z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}})^n$$

Para Bose tenemos $n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$ luego geometrica

Bose :

$$\Xi(z,V,T) = \prod_{\mathbf{p}} \frac{1}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

Para Fermi $n = 0,1$

$$\Xi(z,V,T) = \prod_{\mathbf{p}} (1 + ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}})$$

De donde es inmediato calcular la EOS es

$$\frac{PV}{kT} = \log \Xi(z,V,T)$$

Para Bose

$$\frac{PV}{kT} = -\sum \log(1 - ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}})$$

Para Fermi

$$\frac{PV}{kT} = \sum \log(1 + ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}})$$

Necesitamos otra ecuacion para z

$$N = z\frac{\partial}{\partial z}\log \Xi(z, V, T)$$

Para Bose

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \frac{ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

Pues….

Para Bosones

$$N = z\frac{\partial}{\partial z}\log\prod_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_p}}$$

$$= -z\frac{\partial}{\partial z}\sum_p \log\left(1 - ze^{-\beta\varepsilon_p}\right)$$

$$= -z\sum_p \frac{\partial}{\partial z}\log\left(1 - ze^{-\beta\varepsilon_p}\right)$$

$$= -z\sum_p \frac{-e^{-\beta\varepsilon_p}}{\left(1 - ze^{-\beta\varepsilon_p}\right)} = \sum_p \frac{ze^{-\beta\varepsilon_p}}{\left(1 - ze^{-\beta\varepsilon_p}\right)}$$

Para Fermi

$$\frac{PV}{kT} = \sum \log(1 + ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}})$$

Necesitamos otra ecuacion para z

$$N = z\frac{\partial}{\partial z}\log \Xi(z, V, T)$$

Para Bose

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \frac{ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

Para Fermi

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \frac{ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 + ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

Si ahora calculamos la ocupacion media por nivel

La ocupacion media por nivel :

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{\Xi} \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum_{n_{\mathbf{p}};\ \Sigma n_{\mathbf{p}}=N} n_{\mathbf{p}} \exp(-\beta \Sigma_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}) = \frac{-1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}} \log \Xi$$

$\boxed{\text{Para Bose}}$

$$< n_p >= \frac{-1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \log \Xi = \frac{-1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \log \prod_p \frac{1}{1 - ze^{-\beta \varepsilon_p}}$$

$$< n_p >= \frac{-1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \sum \log \frac{1}{1 - ze^{-\beta \varepsilon_p}}$$

$$< n_p >= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \sum \log(1 - ze^{-\beta \varepsilon_p})$$

$$< n_p >= \frac{1}{\beta} \frac{\beta z e^{-\beta \varepsilon_p}}{(1 - ze^{-\beta \varepsilon_p})} = \frac{ze^{-\beta \varepsilon_p}}{(1 - ze^{-\beta \varepsilon_p})}$$

Resulta entonces

$\boxed{\text{Para Bose}}$

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

$$0 \leq \frac{z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} - 1}$$

Resulta entonces

$\boxed{\text{Para Bose}}$

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

$$0 \leq \frac{z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} - 1}$$ $\Rightarrow$**Debe cumplirse**

$$\boxed{0 \leq e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} - 1 \Rightarrow 1 \leq e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} \Rightarrow 0 \leq (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu) \Rightarrow \varepsilon_{\mathbf{p}} \geq \mu \Rightarrow}$$

para el fundamental $\underline{\varepsilon_{\mathbf{p}} = 0 \Rightarrow 0 \geq \mu}$ de otra forma el fundamental tendria poblacion negativa

ademas si $\mu = 0$ para $\varepsilon_{\mathbf{p}} = 0 \Rightarrow \langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \infty$

$\boxed{\mathbf{0 \geq \mu \;\; BOSE}}$

Para Fermi

$$\langle n_{\mathrm{p}} \rangle = \frac{ze^{-\beta\varepsilon_{\mathrm{p}}}}{1 + ze^{-\beta\varepsilon_{\mathrm{p}}}}$$

Vemos que en este caso **$0 \leq \langle n_p \rangle \leq 1$**

De donde

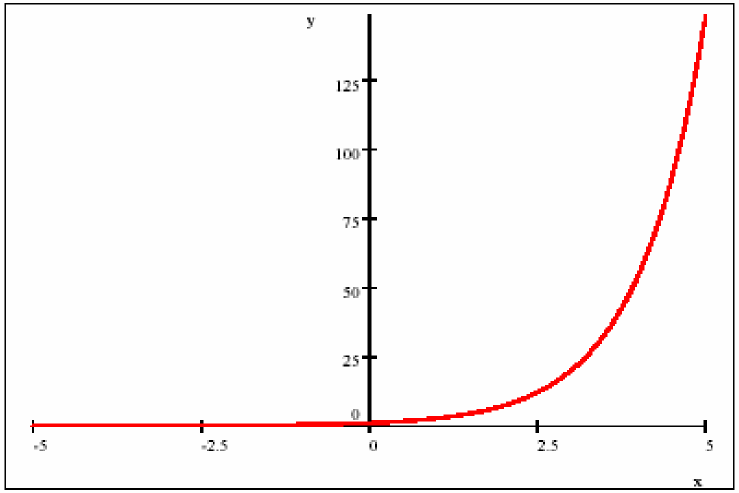
$$0 \leq \left(\frac{ze^{-\beta\varepsilon_{\mathrm{p}}}}{1 + ze^{-\beta\varepsilon_{\mathrm{p}}}} = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_{\mathrm{p}} - \mu)}}\right) \leq 1$$

$$\boxed{0 \leq 1 \leq 1 + e^{\beta(\varepsilon_{\mathrm{p}} - \mu)}}$$

se cumple para todo μ

FERMI cualesquiera μ

exp(x)



Gas Ideal de Fermi

($V \to \infty$)

Si todos los terminos de la suma son finitos podemos pasar a integral, entonces

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{P}{kT} &= \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty dp\,p^2 \log\left(1 + ze^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right) \\ \frac{1}{v} &= \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty dp\,p^2 \frac{1}{1+z^{-1}e^{\beta\frac{p^2}{2m}}} \end{aligned}}$$

Sea $\left(\frac{\beta}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} p = x \,;\, dx = dp\left(\frac{\beta}{2m}\right)^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$\boxed{\frac{P}{kT} = \frac{4}{\lambda^3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dx\,x^2 \log\left(1 + ze^{-x^2}\right) = \frac{1}{\lambda^3} f_{\frac{5}{2}}(z)}$$

y del mismo modo

$$\boxed{\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3} f_{\frac{3}{2}}(z)}$$

con $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mkT}$

veamos un cachito...

Integramos termino a termino

$$f_{\frac{5}{2}}(z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^2 \log\left(1 + z e^{-x^2}\right)$$

$$= \int_0^\infty dx x^2 \left[0 + z e^{-x^2} - \frac{1}{2!} z^2 e^{-2x^2} + \frac{2}{3!} z^3 e^{-3x^2} - \ldots\right]$$

como $\int_0^\infty dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\pi}$

Resulta $$\boxed{\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} z^l}{l^{\frac{5}{2}}}}$$

Entonces la energia sera:

La energia

$$\boxed{\begin{aligned} U(z,T) &= \frac{1}{\Xi}\sum_{N=0} z^N \sum_{n_{\mathbf{p}};\ \Sigma n_{\mathbf{p}}=N} (\Sigma_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}})\exp(-\beta\Sigma_{\mathbf{p}}\varepsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}) = \\ &= \frac{-\partial}{\partial\beta}\log\Xi = \frac{-\partial}{\partial\beta}\frac{PV}{kT} = \frac{-\partial}{\partial\beta}\frac{f_{\frac{5}{2}}(z)}{\lambda^3}V \end{aligned}}$$

pero $\frac{1}{\lambda^3} = \left[\frac{\beta 2\pi\hbar^2}{m}\right]^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow$

$$\frac{P}{kT}$$

$$\frac{U(z,T)}{V} = \underbrace{\frac{3}{2}\beta^{\frac{-5}{2}}\left[\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right]^{\frac{-3}{2}}}\, f_{\frac{5}{2}}(z) = \frac{3}{2}\frac{f_{\frac{5}{2}}(z)}{\lambda^3}kT = \frac{3}{2}P$$

$$\boxed{U(z,T) = \frac{3}{2}PV}$$

$$\frac{3}{2}\beta^{-1}\left[2\pi\hbar^2\beta/m\right]^{-3/2} f_{5/2}(z)$$

$$\lambda^2$$

Gas de Bose

Atencion!, el estado fundamental puede traer problemas.

$$\langle n_p \rangle = \frac{z e^{-\beta e_p}}{1 - z e^{-\beta e_p}}$$

$$= \frac{1}{z^{-1} e^{\beta e_p} - 1}$$

$$= \frac{1}{e^{\beta(e_p - \mu)} - 1} \qquad \mu_{Bose} \leq 0$$

$$\Rightarrow \; si \quad \varepsilon_{\mathrm{p}} = 0 \;\; con \;\; \mu = 0 \ldots$$

Atencion!, el estado fundamental puede traer problemas.

$\Rightarrow$ lo sacamos de la suma y llevamos el resto a la integral

$$\frac{PV}{kT} = -\sum \log(1 - ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}})$$

$$N = \sum_{\mathbf{p}} \frac{ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - ze^{-\beta\varepsilon_{\mathbf{p}}}}$$

luego

$$\boxed{\frac{P}{kT} = -\frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty dp p^2 \log\left(1 - ze^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right) - \frac{1}{V}\log(1-z)}$$

ademas

$$\boxed{\frac{1}{v} = \frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty dpp^2 \frac{1}{-1+z^{-1}e^{\beta\frac{p^2}{2m}}} + \frac{1}{V}\frac{z}{1-z}}$$

Lo cual puede ser reescrito siguiendo metodo usado para el gas de Fermi

$$\boxed{\frac{P}{kT} = \frac{1}{\lambda^3}g_{\frac{5}{2}}(z) - \frac{1}{V}\log(1-z)}$$

$$\boxed{\frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3}g_{\frac{3}{2}}(z) + \frac{1}{V}\frac{z}{1-z}}$$

con $g_{\frac{5}{2}}(z) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^{\frac{5}{2}}}$; $g_{\frac{3}{2}}(z) = z\frac{\partial}{\partial z}g_{\frac{5}{2}}(z)$

$\boxed{\langle n_0\rangle = \frac{z}{1-z};\ \frac{1}{v} = \frac{1}{\lambda^3}g_{\frac{3}{2}}(z) + \frac{\langle n_0\rangle}{V}}$ este ultimo termino tendra relevancia en el limite V$\rightarrow\infty$ si...

como antes

$$U(z,T) = \frac{-\partial}{\partial\beta}\log\Xi = \frac{-\partial}{\partial\beta}\frac{PV}{kT} = \frac{-\partial}{\partial\beta}\frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{\lambda^3}V \Rightarrow$$

$$\boxed{U(z,T)\frac{1}{V} = \frac{3kT}{2}\frac{g_{\frac{5}{2}}(z)}{\lambda^3}}$$

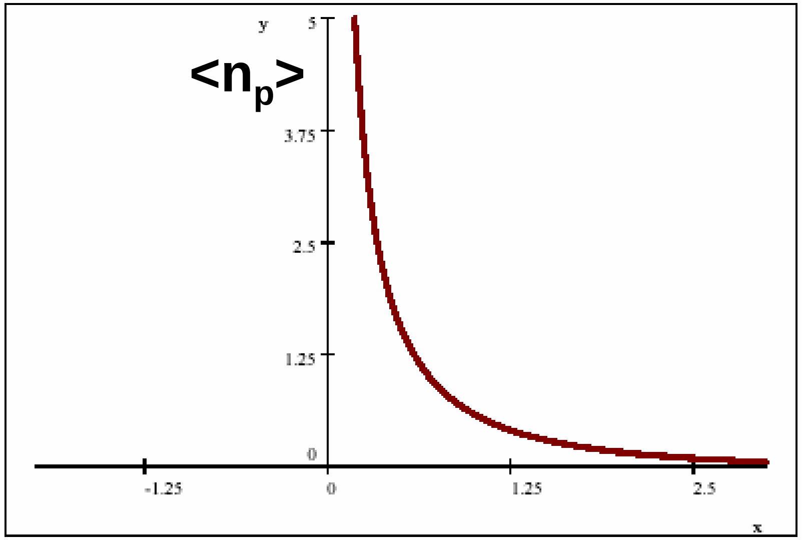
Acerca de los numeros de ocupacion

Estudiamos laocupacion media de una dado nivel

Para Bose

Para Bose

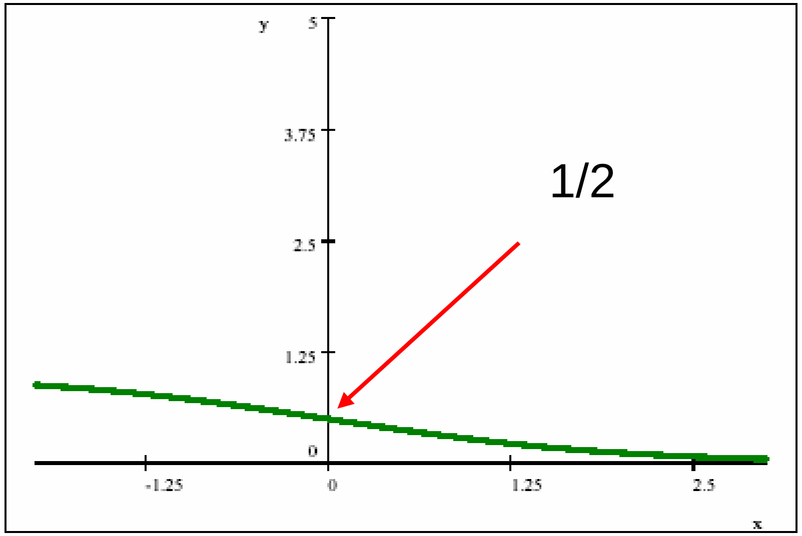
$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}}{1 - z e^{-\beta \varepsilon_{\mathbf{p}}}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} - 1}$$



$$\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT} \right)$$

Para Fermi

$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)}+1}$$



$$\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)$$

Recordemos que para Boltzmann

$$Q_N = \frac{1}{N!}[Q_1(V,T)]^N$$

Ademas

$$\boxed{Q_1(V,T) = \sum e^{-\beta\epsilon} \approx \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty e^{-\beta\epsilon}\epsilon^{1/2}\, d\varepsilon}$$

$\int_0^\infty e^{-\beta x}x^{1/2}dx$ es del tipo $\int_0^\infty e^{-ax^2}x^n dx$ si $y = x^{1/2}$,

$dy = \frac{1}{2x^{1/2}}dx \Rightarrow$

$$2ydy = dx \Rightarrow \boxed{2\int_0^\infty e^{-\beta y^2}y^2 dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\beta^{-3/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(kT)^{-3/2}}}$$

$$\boxed{Q_1(V,T) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2(kT)^{-3/2}} = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}}$$

Como $\lambda^3 = h^3/(2\pi mkT)^{3/2}$

Resulta

$$\boxed{Q_1(V,T) = V/\lambda^3}$$

$$\boxed{\Xi(z,V,T) = \sum_0^\infty z^N Q_N = \sum_0^\infty z^N \frac{V^N}{\lambda^{3N}} = \exp\left(z\frac{V}{\lambda^3}\right)}$$

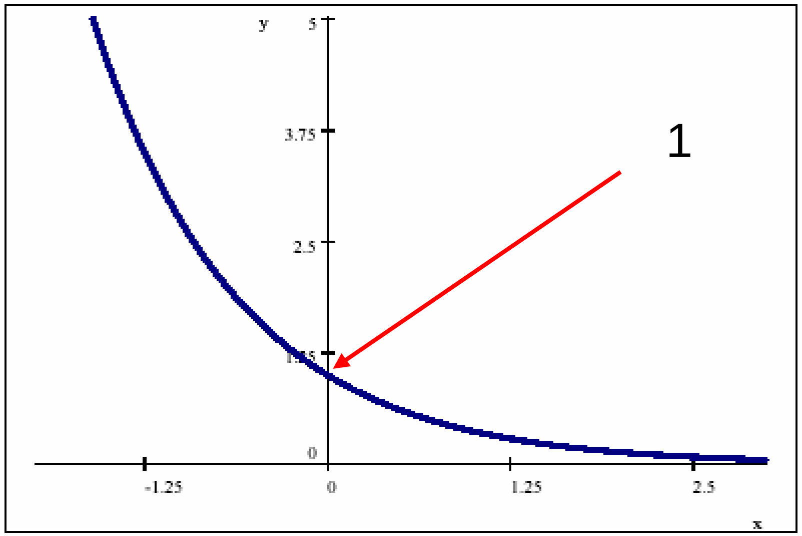
Ademas

$$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{1}{\Xi(z,V,T)}\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \Xi}{\partial \epsilon}\right)\right] = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \log \Xi}{\partial \epsilon}\right)$$

Entonces con $\log \Xi = z\sum e^{-\beta\epsilon}$ resulta $\langle n_\epsilon \rangle = ze^{-\beta\epsilon} = e^{\beta(\mu-\epsilon)}$

Para Boltzmann

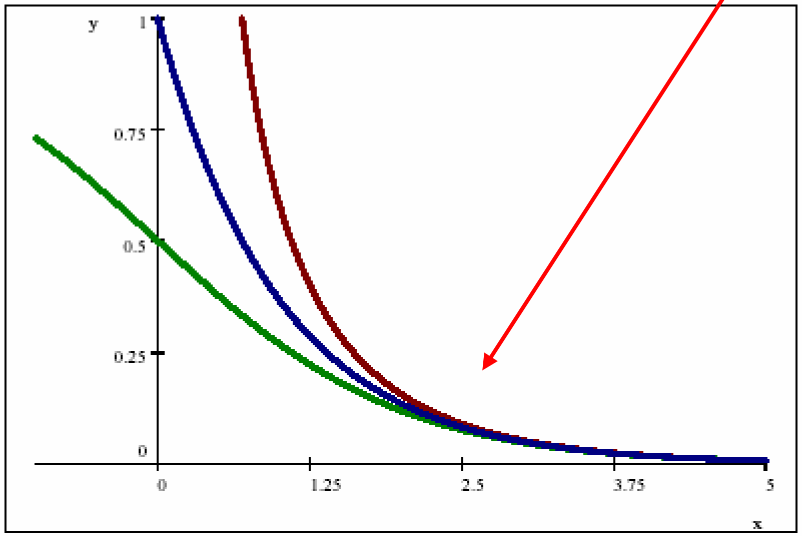
$$\langle n_{\mathbf{p}} \rangle = e^{\beta(-\varepsilon_{\mathbf{p}}+\mu)} \propto e^{\beta(-\varepsilon_{\mathbf{p}})}$$



$$\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)$$

! ! ! ! ! ! ! !

Todo junto $\Rightarrow$



$\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)$

la diferencia entre las estadisticas cuanticas y la clasica se hace imperceptible cuando $e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu)} \gg 1$

En este caso se deduce que para todos los casos vale que

$$\boxed{\langle n_p \rangle << 1}$$

$$\begin{cases} Fermi & \langle n_p \rangle = \dfrac{1}{e^{\beta(e_p-\mu)}+1} \\ Bose & \langle n_p \rangle = \dfrac{1}{e^{\beta(e_p-\mu)}-1} \\ Bolzmann & \langle n_p \rangle = \dfrac{1}{e^{\beta(e_p-\mu)}} \end{cases}$$

Por otro lado

Como sabemos que cuanto mayor es T, mejor es la aproximacion clasica $\Rightarrow$

Tomando en cuenta los boltzmanniones :

$$\boxed{e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{p}})}/z \gg 1 \Rightarrow z \ll 1 \Rightarrow e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1 \Rightarrow \mu < 0 \text{ y } |\mu| \gg 1}$$

como $0 \geq \mu$ para Bose

y para Fermi no habia restriccion $\Rightarrow$ es consistente.