Primer parcial de Física Teórica 3
11/5/2015

Problema 1

Tenemos un resorte del que empíricamente se sabe lo siguiente: (i) $f(T,x) = \alpha T x$, donde α es una constante y f, T y x son respectivamente la tensión, la temperatura y la elongación (longitud menos longitud natural) del resorte; y (ii) la capacidad calorífica del resorte a elongación constante, C_x, es independiente de T y de x.

(a) Pruebe que la entropía del resorte satisface $S(T,x) = C_x \ln(T/\theta) - \alpha x^2/2$, donde θ es una constante.

(b) Calcule la energía libre de Helmholtz $F(T,x)$ en términos de α, C_x y θ, y de ahí obtenga la energía interna $U(T,x)$. (*Ayuda:* recuerde que $\int dt\, \ln t = t(\ln t - 1) +$ constante.)

(c) Supongamos que inicialmente el resorte tiene su longitud natural y temperatura T_i. Si se lo lleva de forma adiabática y cuasiestática a una elongación x, ¿cuál es su temperatura final T?

(d) Si ahora se suelta el resorte y se deja que alcance de nuevo su longitud natural de forma adiabática y libre, ¿cuánto aumenta su entropía?

Problema 2

Asistimos a un partido de tenis[1] entre Rafael Nadal y Novak Djokovic. Cuando llegamos a la cancha ya se está jugando el primer game, y su resultado provisional es "iguales". Así pues, a partir de ahora el marcador del game puede indicar cinco cosas distintas: 1) iguales, 2) ventaja para Nadal, 3) ventaja para Djokovic, 4) game para Nadal y 5) game para Djokovic. Después de un análisis estadístico de partidos previos entre estos dos jugadores concluimos que, en un punto cualquiera, la probabilidad de que Nadal gane el punto es p, y por lo tanto la probabilidad de que lo gane Djokovic es $q = 1 - p$. El desarrollo del game desde el momento en que llegamos a la cancha se puede entender como un proceso de Markov.

(a) Escriba la matriz de transición en términos de p y q. ¿Es ergódico el proceso? ¿Es absorbente?

(b) Calcule el valor de expectación del tiempo (número de puntos) que tarda en finalizar el game desde el momento en que llegamos a la cancha.

(c) ¿Qué probabilidad tiene Nadal de ganar el game?

[1] Para los que nunca vieron un partido de tenis: la unidad básica del tenis es el *punto*, que consiste en que los jugadores se intercambian la pelota hasta que unos de los dos no puede devolverla o la devuelve mal, en cuyo caso el otro gana el punto. Un *game* es una secuencia de puntos, y lo gana el primer jugador que consigue ganar dos puntos más que su rival (hay una condición extra, pero no es importante para el problema).

Ayuda: para resolver el problema va a tener que invertir una matriz 3×3. Le va a servir la fórmula

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}.$$

Para asegurarse de que invirtió correctamente, multiplique su resultado por la matriz que quería invertir y compruebe que obtiene la identidad. *Más ayuda*: compruebe sus resultados de los dos últimos ítems particularizando al caso $p = 1$.

Problema 3

Considere un sistema formado por N partículas idénticas pero distinguibles que no interactúan entre sí. Cada partícula es un oscilador armónico cuántico de frecuencia ω, y además tiene un grado de libertad interno que sólo puede asumir dos estados posibles. La energía correspondiente a cada estado interno es $\pm\epsilon$. Considere que el estado interno de cada partícula es independiente de su estado de traslación.

(a) Escriba los posibles niveles de energía para una sola partícula.

(b) Encuentre la función de partición canónica para el sistema total.

(c) Calcule la energía media por partícula y el calor específico del sistema.

(d) Expanda la energía media por partícula en el límite de altas temperaturas ($k_B T \gg \hbar\omega$ y $k_B T \gg \epsilon$) hasta orden $1/(k_B T)$ inclusive (*ayuda*: $(e^x - 1)^{-1} \simeq 1/x - 1/2 + x/12$, $\tanh x \simeq x$ para $|x| \ll 1$), y de ahí obtenga el comportamiento del calor específico en este límite. Estudie también el comportamiento del calor específico en el límite de bajas temperaturas. Usando estos resultados, grafique cualitativamente el calor específico en función de la temperatura, distinguiendo entre los casos $\epsilon > \hbar\omega/\sqrt{12}$ y $\epsilon < \hbar\omega/\sqrt{12}$.

(e) Encuentre el potencial químico en función de la temperatura.