Segundo parcial de Física Teórica 3
1/7/2015

Problema 1

Considere un gas de electrones confinado a moverse en un plano de área A. Se aplica un campo magnético de módulo B en la dirección normal al plano. Sabemos que, clásicamente, las trayectorias de los electrones son círculos, por lo que cada una de las dos coordenadas cartesianas en el plano se comporta como un oscilador armónico. Como resultado, e ignorando la interacción entre el espín de los electrones y el campo magnético, se obtiene que los niveles de energía de una partícula son

$$\epsilon = 2\mu_B B(n + 1/2) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

donde $\mu_B = \hbar e/(2mc)$ es el magnetón de Bohr (e y m son la carga y la masa del electrón respectivamente, y c es la velocidad de la luz). Cada nivel de energía tiene una degeneración $g = 2AeB/(hc)$.

(a) A partir de la fórmula general para la función de partición grancanónica de un sistema de fermiones idénticos que no interactúan entre sí, pruebe que en este caso

$$\ln \mathcal{Z}(T, A, B, z) = 2A\frac{eB}{hc}\sum_{n=0}^{\infty} \ln[1 + ze^{-\beta 2\mu_B B(n+1/2)}]$$

donde z es la fugacidad y $\beta = 1/kT$.

(b) Calcule el número de particulas en función de T, A, B y z.

(c) Aproxime los resultados de los dos ítems anteriores al orden mas bajo en el límite de baja fugacidad ($z \ll 1$).

(d) A partir de los resultados del ítem anterior calcule la magnetización

$$M = \frac{kT}{A}\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial B}\right)_{T,A,z}$$

en función de T, A, B y N al orden más bajo en el límite $z \ll 1$ y $\mu_B B/(kT) \ll 1$. Luego calcule la susceptibilidad magnética. El resultado ¿corresponde a un sistema para, ferro o diamagnético? *Ayuda*: $1/\sinh(x) \simeq 1/x - x/6$ para $x \ll 1$.

Problema 2

Ignorando los problemas asociados al estado fundamental, la función de partición grancanónica de un gas ideal de bosones de masa m y espín 0 está dada por la ecuación

$$\ln \mathcal{Z}(T, V, z) = \frac{V}{\lambda^3}\, g_{5/2}(z),$$

donde $\lambda = h/(2\pi mkT)^{1/2}$ es la longitud de onda térmica y $g_\nu(z) = [\int_0^\infty x^{\nu-1}/(z^{-1}e^x - 1)]/\Gamma(\nu)$ es una integral de Bose.

(a) A partir de la ecuación anterior, obtenga la presión, p, y el número de partículas, N, del gas como funciones de T, V y z.

(b) Identifique el valor crítico, x_c, del parámetro $V/(N\lambda^3)$ por debajo del cual el número de partículas en el estado fundamental se vuelve macroscópico.

(c) Obtenga la presión como función de T, V y N en los casos $V/(N\lambda^3) \gg x_c$ y $V/(N\lambda^3) < x_c$.

(d) Calcule el valor al que tiende $(\partial p/\partial V)_{T,N}$ en el límite $V/(N\lambda^3) \to x_c^+$ (*ayuda*: recuerde que $g_{1/2}(z)$ diverge en el límite $z \to 1^-$).

(e) A partir de los resultados obtenidos en los dos ítems anteriores, grafique p como función de V para T y N constantes. Interprete el gráfico.

Problema 3

Considere el modelo de Ising con Hamiltoniano

$$H(s_1, \ldots, s_N) = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \mu B \sum_{i=1}^{N} s_i$$

para una red bidimensional triangular (ver figura 1). Dividamos la red en celdas de tres espines como la que se muestra en la figura 2. Describiendo la interacción de cada celda con su entorno mediante la aproximación de campo medio, y tratando exactamente la interacción entre los espines de la celda, pruebe que la temperatura crítica del sistema, T_c, satisface la ecuación

$$x = \frac{1}{2} \frac{e^x + 3e^{-x}}{3e^x + e^{-x}} \qquad x = 2J/(kT_c).$$

Resolviendo esta ecuación numéricamente se obtiene $T_c \simeq 5.64 J/k$. Este resultado ¿es mayor o menor que el que se obtiene mediante la aproximación de campo medio usual?

Figura 1

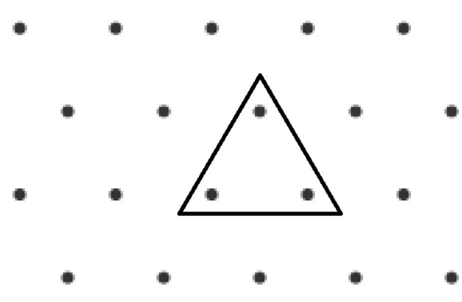

Figura 2