Primer parcial de Física Teórica 3
5/10/2015

Problema 1

Considere un sistema unidimensional formado por N partículas clásicas y distinguibles de masa m. Las partículas están sometidas a un potencial armónico de frecuencia angular ω, y también al campo gravitatorio terrestre (el sistema está orientado verticalmente). El hamiltoniano del sistema es pues

$$H(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 + mgq_i \right) + \frac{1}{2} Nm \left(\frac{g}{\omega} \right)^2 ,$$

donde g es la aceleración de la gravedad y la constante aditiva $Nm(g/\omega)^2/2$ se ha añadido por conveniencia.

(a) Calcule el número de microestados, $\bar{\Omega}(E)$, con energía menor o igual que E. (*Ayuda*: el volumen de una esfera de radio r en un espacio de dimensión d par es $\pi^{d/2} r^d/(d/2)!$)

(b) Calcule el número de microestados, $\Omega(E)$, con energía entre $E - \Delta E$ y E, donde ΔE es la precisión con la que medimos la energía. Evalúe el resultado al orden más bajo en el límite en que N es muy grande, y de ahí obtenga la entropía $S(E)$.

(c) Obtenga $E(T)$ y $F(T)$, donde T es la temperatura y F la energía libre de Helmholtz.

Problema 2

Considere una cadena lineal formada por N eslabones distinguibles, que vamos a interpretar como un modelo microscópico de un resorte. Cada eslabón puede tener dos energías, 0 y ϵ, y para cada una de estas energías hay dos estados posibles, que corresponden a que el eslabón tenga longitud a o b. El resorte se encuentra en equilibrio a temperatura T y tensión f.

(a) Elija un ensamble para trabajar y escriba la función de partición correspondiente.

(b) Calcule la energía interna, E, y la longitud, L, del resorte como funciones de T, f y N.

(c) Pruebe que, para tensiones pequeñas, se satisface la ley de Hooke,

$$f(T, L, N) = \kappa(T, N)[L - L_0(N)],$$

y obtenga el valor de la constante recuperadora $\kappa(T, N)$ y la longitud natural $L_0(N)$ del resorte.

Problema 3

Considere un gas de fermiones de spin 3/2 y masa m que no interactúan entre sí. Las partículas pueden moverse libremente en el plano xy, mientras que en la dirección z están sometidas a un potencial armónico de frecuencia angular ω. Por lo tanto, las energías monoparticulares tienen la forma

$$\epsilon(\mathbf{p}, n) = \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega n,$$

donde $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ es la componente del momento en el plano xy y n es un número natural. En el plano xy, el gas está contenido en un cuadrado de lado L, que suponemos lo bastante grande para poder tratar clásicamente el movimiento en este plano. El sistema se encuentra en equilibrio a temperatura T y fugacidad z.

(a) Muestre que la función de partición grancanónica del gas satisface

$$\log Z_{\mathrm{GC}}(T, L, z) = 4\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_2(z_n),$$

donde $\lambda = h/\sqrt{2\pi mkT}$ es la longitud de onda térmica y $z_n = ze^{-\beta\hbar\omega n}$. A partir de este resultado obtenga el número medio de partículas, N, como función de T, L y z.

(b) Suponiendo que la energía de Fermi satisface $\epsilon_F \ll \hbar\omega$, obtenga el potencial químico, μ, como función de T, L y N a temperaturas bajas, ignorando términos de orden T^3. ¿Qué condición debe satisfacer N para que se cumpla la suposición sobre ϵ_F?

(c) Calcule la capacidad calorífica a volumen constante en el límite de altas temperaturas, y verifique que se cumple el teorema de equipartición.