Segundo parcial de Física Teórica 3
23/11/2015

Problema 1

Considere un sistema de bosones idénticos de masa m, spin 1 y momento magnético μ_m que no interactúan entre sí. Las partículas están confinadas en una trampa armónica tridimensional de frecuencia angular ω, y además están sometidas a un campo magnético uniforme de magnitud $B > 0$ en la dirección z. El hamiltoniano de una partícula es pues

$$h(\mathbf{q}, \mathbf{p}, s) = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 |\mathbf{q}|^2 - \mu_m B s,$$

donde s es la componente z del spin. El sistema está en equilibrio a temperatura T y fugacidad z.

(a) Calcule el logaritmo de la función de partición grancanónica del sistema, Z_{GC}, y de ahí obtenga el valor medio del número de partículas, N. (*Ayuda*: le puede ser útil saber que el área de la esfera de radio 1 en un espacio de d dimensiones es $2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$.)

(b) Obtenga los valores a los que tiende la temperatura crítica, T_c, del sistema en los límites $B \to 0$ y $B \to \infty$, como funciones de N y ω.

(c) Calcule la magnetización por partícula, M, del sistema como función de T, ω, B y N a temperaturas por debajo de la crítica.

Problema 2

El parámetro de orden asociado a la transición de fase líquido-superfluido es una función compleja, Ψ, que puede ser interpretada como el número de partículas en la fase superfluida multiplicado por su función de onda. La energía libre de Ginzburg-Landau correspondiente es

$$F[\Psi; T] = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + \frac{a(T - T_c)}{2} |\Psi|^2 + \frac{b}{4} |\Psi|^4 \right],$$

donde T es la temperatura, T_c es la temperatura crítica y a, b y m son constantes positivas, la última de las cuales puede ser interpretada como la masa de las partículas que forman el superfluido.

(a) Obtenga la ecuación diferencial que debe satisfacer Ψ para ser un extremo de F.

(b) Suponiendo que $T < T_c$, obtenga una solución de esta ecuación que describa el superfluido con densidad uniforme no nula moviéndose a velocidad constante $\mathbf{v}$. ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $|\mathbf{v}|$ a una dada temperatura?

(c) Calcule el calor específico, c_V, del superfluido en la configuración del ítem anterior.

Problema 3

Considere una partícula browniana que se mueve en una dimensión en un medio con coeficiente de fricción γ bajo la influencia de un ruido blanco gaussiano de amplitud espectral g. Sea $P(x,t)$ la densidad de probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición x en el instante t. En el límite de alta fricción, P obedece la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{g}{2\gamma^2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}.$$

(a) Encuentre la solución general de esta ecuación como una integral de la forma $P(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk P_k(t) e^{ikx}$.

(b) Obtenga explícitamente $P(x,t)$ para $t \geq 0$ suponiendo que, en el instante $t = 0$, la partícula se encuentra con certeza en la posición $x = 0$. (*Ayuda*: $\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-\alpha k^2 + ikx} = \sqrt{\pi/\alpha}\, e^{-x^2/(4\alpha)}$.)

(c) Calcule $\langle x(t)\rangle$, $\langle x^2(t)\rangle$ y la entropía de Shannon, $S(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P(x,t) \log P(x,t)$, para la densidad de probabilidad obtenida en el ítem anterior. Comente su resultado para $S(t)$.