**Física Teórica 3 – 1er cuatrimestre de 2016**

**Guía 2:** *Combinatoria, probabilidad, información y entropía*

## I. Combinatoria

1. (a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar $5$ personas en hilera para sacarse una foto?
   (b) ¿De cuántas formas si $A$ y $B$ quieren salir juntos (uno al lado del otro)?
2. ¿Cuántas palabras de $3$ letras (que tengan o no sentido) se pueden formar con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*? (a) sin repetir letras, (b) sin importar si se repiten letras.
3. Se llama anagrama de una palabra a toda permutación de sus letras, de modo que el resultado puede tener o no sentido. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra MANZANA?
4. Para un torneo de ping pong se anotaron $6$ personas. ¿Cuántos partidos se van a jugar si todos tienen que jugar entre sí?
5. Hay $N$ libros y $M$ cajas. Cada caja puede contener hasta $N$ libros, apilados uno sobre el otro. Cuántas maneras hay de acomodar los libros en las cajas si:
   (a) Los libros son todos iguales y las cajas todas distintas.
   (b) Los libros y las cajas son todos distintos.
   (c) Los libros y las cajas son todos iguales.
   (d) Los libros son todos distintos y las cajas todas iguales.

## II. Probabilidad

1. Se lanza una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?
2. Se lanza un dado cúbico, con las caras numeradas de $1$ a $6$.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga $6$?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par?
3. Volviendo al problema 1. Si las $5$ personas se ordenan al azar, ¿cuál es le probabilidad de que $A$ y $B$ salgan juntos?
4. Sabemos que el número de teléfono de Juan tiene $8$ dígitos: dos $3$, tres $1$, dos $0$ y un $9$, y no empieza con $0$. ¿Cuál es la probabilidad de que en un llamado nos comuniquemos con Juan?
5. Se lanzan $10$ dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres $6$?
6. Una bacteria tiene probabilidad $p$ de reproducirse en un intervalo de tiempo. Si hay $5$ bacterias, calcule la probabilidad de que sólo $2$ se reproduzcan en ese intervalo.
7. En un partido de truco que dura $15$ manos entre $4$ jugadores, encuentre la probabilidad de que a un dado jugador nunca le toque el ancho de espadas, y de que el ancho de espadas no salga en todo el partido.
8. **Probabilidad Condicional.** Se lanza un dado de $8$ caras, numeradas del $1$ al $8$.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga $5$?

(b) Si le digo que salió un número impar. ¿Cuál es la probabilidad de que ese número sea $5$?

9. La urna A tiene 7 bolas blancas y 3 negras, y la urna B, 5 blancas y 5 negras. Se extrae al azar una bola de A y se la coloca en B. A continuación se extrae al azar una bola de B. Encuentre la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean negras. Sugerencia: En vez de intentar enumerar todas las posibilidades, es mejor definir los sucesos $A$ y $B$ como "bola extraída de $A$ es negra" y "bola extraída de $B$ es negra", respectivamente. Calcular $P(A)$, $P(A|B)$, y luego obtener $P(A \bigcap B)$.

10. Dos volúmenes, $V_1$ y $V_2$, que contienen en total $N$ moléculas distinguibles y no interactuantes, se comunican a través de una abertura. Postule probabilidades razonables, $p_1$ y $p_2$, de que una dada molécula esté en $V_1$ o $V_2$, respectivamente. Demuestre que la probabilidad de que en $V_1$ haya exactamente $n$ moléculas está dada por una binomial,
$$P(n) = \binom{N}{n} p_1^n \, p_2^{N-n}.$$

11. Dos personas, $A$ y $B$, juegan a lanzar alternativamente una moneda; gana el primero que obtiene cara. Si $A$ hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. (*Sugerencia:* hay infinitos caminos que llevan a uno u otro ganador y la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando la probabilidad de cada camino independiente; trate de dar a esta proposición una forma rigurosa. Al margen de lo anterior, la simetría del problema permite llegar más rápidamente al resultado: note que luego del primer lanzamiento, si $A$ no gana, a partir del segundo lanzamiento los roles de $A$ y $B$ se intercambian; formalice esto último y obtenga, en un par de pasos, el resultado.)

12. **El problema del cumpleaños.** En un aula hay $n$ personas. Considerando, para simplificar, que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es $1/365$, y que las fechas de los cumpleaños de las $n$ personas son estadísticamente independientes:

    (a) ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad $p(n)$ de que al menos dos cumplan años el mismo día supere el 50%? Grafique $p(n)$ con la ayuda de algún programa.

    (b) Una expresión aproximada de $p(n)$ puede obtenerse si se analizan las personas de a pares. i) Calcule la probabilidad de que un dado par de personas no cumpla años el mismo día. ii) Calcule cuántos pares pueden formarse entre $n$ personas. iii) Si se asume que cada evento de la forma "$A$ y $B$ no cumplen años el mismo día" (al que notaremos como $AB$), es independiente de todos los otros, encuentre la probabilidad de que ningún par de personas cumpla años el mismo día, y de ahí obtenga $p_{\text{aprox}}(n)$. ¿En dónde entra la aproximación? Grafique $p_{\text{aprox}}(n)$ y compare con la solución exacta.

    (c) En verdad, no todos los eventos de la forma "$A$ y $B$ no cumplen años el mismo día" son independientes entre sí. Para ver eso en un caso sencillo, suponga que hay 3 personas, $M$, $L$ y $C$, y calcule $P(ML, MC, LC)$, $P(ML, MC)$, $P(ML|MC)$ y $P(ML|MC, LC)$.

13. **Falso positivo.** Aparece una nueva enfermedad, 100% fatal aunque extremadamente rara, estimándose que se da en 1 de cada 1000 millones de personas. Sus síntomas son imperceptibles, hasta que, eventualmente, la cabeza explota. Por suerte, se descubre un test de diagnóstico prácticamente infalible: la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser ensayado en una persona sana es de 1 en un millón, lo que se conoce como un *falso positivo*. Existe una probabilidad igual de que el test falle al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad.

(a) Una persona se hace el test y le da positivo. Teniendo en cuenta que el test falla en un caso de cada un millón, ¿debe desahuciarse a la persona o darle alguna esperanza? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad? (*Sugerencia:* el hecho de formular esta pregunta indica que la respuesta no es "1 en un millón".)

(b) Si a una persona el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?

(c) Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.

14. **Problème des rencontres.** Hay $n$ objetos distintos, dispuestos en $n$ lugares diferentes según un orden inicial. Tiene lugar una permutación al azar de estos objetos. Se pide encontrar la probabilidad $p(n)$ de que ningún objeto vuelva a su posición inicial, asumiendo que todas las permutaciones tienen igual probabilidad $1/n!$. Se trata, en definitiva, de contar el número de permutaciones de $n$ elementos que no dejan ningún elemento en su posición original. Resulta complicado contar directamente estos casos. Sin embargo, al igual que en muchos problemas de combinatoria, es más sencillo encontrar una relación de recurrencia y trabajar a partir de ahí.

(a) Demuestre que $p(n)$ satisface la siguiente relación de recurrencia,

$$np(n) - (n-1)p(n-1) = p(n-2).$$

(b) A partir de lo anterior, encuentre $p(n)$ y muestre que $p(n) \to e^{-1}$ cuando $n \to \infty$. *Sugerencia:* defina la función generatriz $F(x) = \sum_n x^n p(n)$ y transforme la relación de recurrencia para $p$ en una ecuación diferencial para $F$. La condición inicial puede fijarse calculando directamente un caso sencillo, por ejemplo $p(2)$.

15. Un complicado problema de combinatoria y probabilidad, que involucra a cuatro pistoleros, y en donde hay que averiguar cuál es la mejor estrategia que debe seguir cada uno si quiere mantenerse con vida, es omitido en esta guía. No así un problema que deriva de aquél, y que traducimos en esta forma:

**El problema de los pistoleros daneses**. El último pistolero con vida decide, como es natural, celebrar su triunfo con una fiesta. ¡Ahora tiene tantos amigos! (pues esto suele acontecerle a los ganadores) que, dejando sólo lo más pasable, decide reunir a 111 comensales. Tal como ha escuchado que es de uso en las recepciones de los embajadores de los mejores países del mundo, frente a cada silla dispone una tarjeta con el nombre del invitado correspondiente. Desafortunadamente, hombre de poco roce, el primer invitado en llegar no nota este detalle y se sienta en un lugar al azar (es decir, puede incluso ocupar el lugar correcto). Resignados y corteses (hijos de Odín al fin y al cabo), los otros invitados se sientan en sus lugares correctos, siempre y cuando los encuentren disponibles; caso contrario toman un lugar desocupado al azar. La pregunta, entonces, es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que el último invitado en llegar se siente en el lugar que le fue originalmente asignado? La respuesta es completamente anti intuitiva.

*Sugerencia:* Los casos simples de 2, 3, 4 invitados pueden analizarse directamente y servir como base al problema de los 111 invitados. Es interesante también hacer el experimento numérico en la computadora: en muy pocas líneas puede escribirse un programa que genere el ordenamiento final de los invitados, cuyo número puede variarse; ejecutándolo muchas veces y contando aquellas en que el último invitado se sienta en el lugar que le corresponde, puede estimarse la probabilidad buscada y su dependencia con el número de invitados.

16. **Variables aleatorias.** Calcule la media y la varianza de las variables aleatorias descriptas por las siguientes distribuciones de probabilidad:

   (a) Uniforme discreta: $P(n) = \frac{1}{N}$; con $1 \leq n \leq N$, números enteros.

   (b) Binomial: $P(n) = \binom{N}{n} p^n \, (1-p)^{N-n}$; con $n, N \in \mathbb{N}$ y $p < 1$.

   (c) Uniforme continua: $f(x) = 1/L$; con $x \in [0, L]$.

   (d) Exponencial: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$; con $x, \lambda \geq 0$.

   (e) Gaussiana: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

17. Un borracho está apoyado en una farola, y empieza a caminar dando pasos de igual longitud hacia la izquierda o hacia la derecha con igual probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre se encuentre otra vez junto a la farola después de dar $N$ pasos

   (a) si $N$ es par?

   (b) si $N$ es impar?

18. Seguimos con el borracho de arriba. Después de dar $N$ pasos, sean $n_d$ el número de pasos que dio hacia la derecha y $n_i$ el número de pasos que dio hacia la izquierda, y sea $m = n_d - n_i$ el desplazamiento neto hacia la derecha. Calcule $\langle m \rangle$, $\langle m^2 \rangle$, $\langle m^3 \rangle$ y $\langle m^4 \rangle$.

19. En el juego de la ruleta rusa (no recomendado por los docentes de esta materia), uno introduce una única bala en el tambor de un revólver, dejando las otras cinco recámaras del tambor vacías. Entonces uno hace rodar el tambor, apunta a su propia cabeza y aprieta el gatillo.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de seguir vivo después de haber jugado $N$ veces al juego?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de sobrevivir a $N-1$ vueltas del juego y perder la $N$-ésima?

   (c) ¿Cuál es el número medio de veces que un jugador aprieta el gatillo en este macabro juego?

## III. Información y Entropía

1. En Teoría de la Información, la entropía se define como

$$S = -\sum_{r=1}^{M} p(r) \log p(r),$$

   donde $p(r)$ es la probabilidad del estado $r$, entre $M$ posibles. A mayor entropía mayor es la incertidumbre antes de conocer el estado de un sistema, y entonces mayor es la información que se gana al conocerlo.

   (a) Graficar $x \log x$ en el intervalo $\overline{0,1}$. ¿Qué pasa con $S$ cuando uno de los estados ocurre con probabilidad 1?

   (b) Demostrar que $S$ es no negativa y que es máxima cuando todos los estados tienen igual probabilidad, $p(r) = 1/M$. *Sugerencia:* que hay un extremo es fácil; demostrar que es un máximo es más difícil. Las dos cosas pueden hacerse en un solo paso usando la llamada desigualdad de Jensen, de la teoría de funciones convexas. Si $\Phi$ es continua y convexa, entonces

$$\Phi\left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} a_k\right) \leq \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \Phi(a_k).$$

(Es fácil entender esta desigualdad si se piensa a $\Phi(x)$ como la función que define la coordenada $y$ de cierto arco convexo, con una distribución de masas unidad sobre el arco y cuyas coordenadas $x$ son las cantidades $a_k$. La desigualdad dice que el centro de masa está *dentro* del arco, lo que es bastante intuitivo; Callen, §17-1.)

2. Calcular la entropía para las distribuciones de probabilidad del problema 16. Note que para las variables continuas debe reemplazar la sumatoria sobre estados $r$ en la definición de entropía por una integral sobre el soporte de la variable. En ese caso se la llama "Entropía Diferencial".

3. **Principio de Máxima Entropía**. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre la distribución de probabilidades de Máxima Entropía de una variable aleatoria si conoce

   (a) $\langle x \rangle = \mu$

   (b) $\langle x \rangle = \mu$ y $\mathrm{Var}(x) = \langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2$

4. Se observa que en un dado cargado el número 6 sale el doble de veces que el número 1. No se observa nada raro para las otras caras. ¿Cuáles son las probabilidades $p_m (1 \leq m \leq 6)$ que maximizan la entropía? (Ejercico 4h de Balian)