Física Teórica 3 − 1er cuatrimestre de 2016

Guía 4: *Teoría cinética − Ecuación de Boltzmann*

1. Obtenga la distribución de Maxwell-Boltzmann a partir de los ensambles microcanónico, canónico y grancanónico.

2. Considere un gas clásico de partículas de masa m descripto por la función de distribución de una partícula $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, y sea $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ una magnitud asociada a cada partícula del gas.

   (a) Si se usa la variable $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$, ¿cuál es, en términos de f, la función de distribución adecuada?

   (b) Escribir el valor medio de $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ en el punto $\mathbf{r}$ a tiempo t, $\langle\chi\rangle(\mathbf{r}, t)$.

   (c) Escribir la densidad de $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ en $\mathbf{r}$ y t, $\rho_\chi(\mathbf{r}, t)$.

   (d) ¿Cuál es la función $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ cuya densidad corresponde a la densidad de partículas $n(\mathbf{r}, t)$?

   (e) Escribir las expresiones integrales que definen la densidad n, la velocidad media $\mathbf{u}$, la densidad de energía cinética ϵ y la densidad de impulso $\boldsymbol{\pi}$. En particular, relacionar $\boldsymbol{\pi}$ con n y $\mathbf{u}$.

3. Para un gas diluido de partículas ultrarrelativistas, encuentre

   (a) la función de distribución de equilibrio;

   (b) la ecuación de estado.

4. Una habitación de volumen $3 \times 3 \times 3$ m^3 se encuentra en condiciones estándar (presión atmosférica y temperatura 300 K).

   (a) Estime la probabilidad de que, en un dado instante de tiempo, una dada región de la habitación de volumen 1 cm^3 se quede sin aire debido a fluctuaciones estadísticas espontáneas.

   (b) Repita la estimación para un volumen de 1 Å.

5. Un gas en equilibrio está a temperatura T y tiene densidad de partículas n. Su función de distribución es la de Maxwell−Boltzmann. Sobre una de las paredes del recipiente que contiene al gas, hay un pequeño orificio de área A. Asumiendo que pueda despreciarse el efecto del orificio sobre la distribución de equilibrio del gas, calcular el número de partículas que escapan por unidad de tiempo.

6. Escribir la función de distribución exacta de equilibrio de un gas en un potencial externo $\phi(\mathbf{r})$, en términos de la función de distribución de equilibrio cuando $\phi = 0$ (Huang 2da. ed. pág 78). Sea n_0 la densidad del aire en la superficie terrestre. Determine la densidad n_z a una altura z suponiendo equilibrio y temperatura uniforme. Despreciar la variación de g con la altura.

7. Una columna cilíndrica de gas a temperatura T rota alrededor de su eje a velocidad angular constante ω. Encuentre la función de distribución de equilibrio.

8. Asumiendo que la función de distribución del gas es una distribución de Maxwell−Boltzmann local más una corrección δf,

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = f_0(\mathbf{r},\mathbf{p},t) + \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{n(\mathbf{r},t)}{[2\pi mkT(\mathbf{r},t)]^{3/2}}\,\exp\left[-\frac{|\mathbf{p}-m\mathbf{u}(\mathbf{r},t)|^2}{2mkT(\mathbf{r},t)}\right] + \delta f(\mathbf{r},\mathbf{p},t), \quad (1)$$

con tres condiciones suplementarias que fijan los valores de n, $\mathbf{u}$ y T, a saber,

$$\int d^3p\,\delta f = 0, \qquad \int d^3p\,\mathbf{p}\,\delta f = 0, \qquad \int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\,\delta f = 0, \quad (2)$$

demostrar que las tres condiciones anteriores significan que las funciones n y $\mathbf{u}$ que aparecen en f_0 son la densidad y la velocidad media exactas y que la densidad de energía cinética exacta es

$$\epsilon = \frac{3}{2}nkT + \frac{1}{2}n\,mu^2,$$

lo que define T en general. (Algunas integrales útiles figuran en la última página.)

9. En este problema se calcula la conductividad eléctrica de un gas maxwelliano de electrones en la aproximación de tiempo de relajación. Ésta es una buena aproximación para un plasma: esencialmente, un gas neutro de iones con poca movilidad y electrones libres que chocan únicamente contra los iones. Es importante notar que, debido a la disparidad entre las masas de los electrones y de los iones, desde el punto de vista de los electrones los iones son blancos fijos de masa infinita. En estos choques la energía de los electrones se conserva, pero no su impulso. La distribución de equilibrio, que se construye a partir de las cantidades que se conservan en las colisiones, carecerá por lo tanto de un término lineal en el impulso. La aproximación correcta es entonces

$$f(\mathbf{r},t) = f_0(\mathbf{r},t) + \delta f(\mathbf{r},t) = \frac{n(\mathbf{r},t)}{[2\pi mkT(\mathbf{r},t)]^{3/2}}\,\exp\left[-\frac{p^2}{2mkT(\mathbf{r},t)}\right] + \delta f(\mathbf{r},t),$$

sin término de arrastre, y donde ahora sólo se piden dos condiciones,

$$\int d^3p\,\delta f = 0, \qquad \int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\,\delta f = 0. \quad (3)$$

Hechas estas salvedades, la aproximación de tiempo de relajación se plantea como antes,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} f = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

A orden más bajo y en régimen estacionario se encuentra

$$\delta f = -\tau\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f_0 + \mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{p}} f_0\right).$$

Rara vez uno está interesado en escribir δf explícitamente. Lo que interesa es calcular integrales de δf en el espacio de impulsos. En tal caso, las derivadas respecto de la posición se podrán sacar fuera de las integrales, y las derivadas respecto del impulso se podrán integrar por partes.

(a) Demostrar que para la fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q\,[\mathbf{E} + (mc)^{-1}\,\mathbf{p}\times\mathbf{B}]$, con campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ independientes del tiempo, las condiciones (3) se cumplen automáticamente a orden τ.

(b) Demostrar que la velocidad media del gas de electrones a orden τ está dada por

$$n\mathbf{u} = -\frac{\tau}{m}\,\nabla(nkT) + \frac{\tau n q\,\mathbf{E}}{m}.$$

Multiplicando por q se obtiene la corriente eléctrica; el término proporcional a $\mathbf{E}$ es la conductividad. Al margen de esto, se ve que un gradiente de temperatura también genera una corriente eléctrica.

Algunas integrales útiles

Si f es la distribución de Maxwell−Boltzmann centrada en $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{u} = 0$,

$$f(p) = \frac{n}{(2m\pi kT)^{3/2}}\,\exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right),$$

entonces:

$$\begin{aligned}
&\int d^3p\; f(p) = n,\\
&\int d^3p\; p_i p_j\, f(p) = \delta_{ij}\, m\, nkT,\\
&\int d^3p\; p^2\, f(p) = 3m\, nkT,\\
&\int d^3p\; p_i p_j p_k p_l\, f(p) = (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})\; n(mkT)^2\\
&\int d^3p\; p^2 p_i p_j\, f(p) = 5\,\delta_{ij}\, n(mkT)^2,\\
&\int d^3p\; p^4\, f(p) = 15\; n(mkT)^2.
\end{aligned}$$

Notar que la integral de un número impar de componentes del impulso siempre es cero, por simetría. Si se trata de hacer integrales con $m\mathbf{u} \neq 0$, es decir, con la gaussiana no centrada de la ec. (1), hay que hacer el cambio de variable $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + m\mathbf{u}$, que centra la gaussiana pero desplaza las componentes del impulso que se están promediando.