Física Teórica 3 – 1er cuatrimestre de 2016

Guía 8: *Teoría de Landau y grupo de renormalización*

Parte I: teoría de Landau

1. La energía libre de Landau para un ferromagneto (simetría $O(3)$) en ausencia de campo magnético externo, es:
$$f(m,T) = a(T)m^2 + \frac{b(T)}{2}m^4$$
   (a) Es de esperar que m sea nula para $T > T_c$, y finita para $T < T_c$. ¿Qué condiciones deben cumplir $A(T)$ y $b(T)$ para que dicho comportamiento se cumpla?

   (b) Sea $a(T) = a_0(T - T_c)$, $a_0 > 0$ y $b(T) = b = \text{cte} > 0$. En las cercanías de una transición de fase valen las siguientes relaciones de *scaling*:
$$\begin{aligned} m(T) &\sim (T_c - T)^{\beta}(h = 0, T < T_c) \\ c_V &\sim |T - T_c|^{-\alpha}(h = 0) \\ \xi(T) &= \partial_h m|_h = 0 \sim |T - T_c|^{-\gamma}(h = 0) \\ m(h) &\sim h^{1/\delta}(T = T_c) \end{aligned}$$
   Calcule, para nuestro modelo, los exponentes críticos α, β, γ y δ

2. Considere un sistema cuya energía libre de Landau es:
$$A(m,t) = -hm + q(t) + r(t)m^2 + s(t)m^4 + n(t)m^6$$
   donde $n(t)$ es una constante positiva fija. Minimice A con respecto a m y examine la magnetización espontánea m_0 como función de los parámetros r y s. En particular muestre que

   (a) Para $r > 0$ y $s > -(3nr)^{1/2}$, $m_0 = 0$ es la única solución real.

   (b) Para $r > 0$ y $-(4nr)^{1/2} < s \leq -(3nr)^{1/2}$, $m_0 = 0$ o $m_0 = \pm m_1$, donde
$$m_1^2 = \frac{\sqrt{s^2 - 3nr} - s}{3n}$$
   Sin embargo, dado que el mínimo de A en $m_0 = 0$ es menor que los mínimos en $m_0 = \pm m_1$, la situación de equilibrio corresponde al caso $m_0 = 0$.

   (c) Para $r > 0$ y $s = -(4nr)^{1/2}$ es $m_0 = 0$ y $m_1 = \pm(r/n)^{1/4}$. Ahora, el mínimo de A en $m_0 = 0$ coincide con los correspondientes a $m_1 = \pm(r/n)^{1/4}$, de modo tal que es igualmente probable tener magnetización espontánea como magnetización nula.

   (d) Para $r > 0$ y $s < -(4nr)^{1/2}$ es $m_0 = \pm m_1$, lo que implica una transición de fase de primer orden (los dos estados disponibles difieren en un valor finito de m). La línea $s = -(4nr)^{1/2}$ con $r > 0$ se denomina "línea de transición de fase de primer orden".

   (e) Para $r = 0$ y $s < 0$, $m_0 = \pm(2|s|/3n)^{1/2}$.

   (f) Para $r < 0$, $m_0 = \pm m_1$ para todo s. Cuando $r \to 0, m_1 \to 0$ si $s > 0$.

(g) Para $r = 0$ y $s > 0$, $m_0 = 0$ es la única solución. Combinando este resultado con el del punto anterior, concluya que la linea $r = 0$, con $s > 0$ es una linea de transiciones de fase de segundo orden.

Las lineas de primer y segundo orden se encuentran en el punto $r = s = 0$, que es el denominado punto tricrítico.

3. Según la teoría de Guinzburg-Landau, la siguiente es una expresión válida para la energía libre asociada a materiales superconductores:

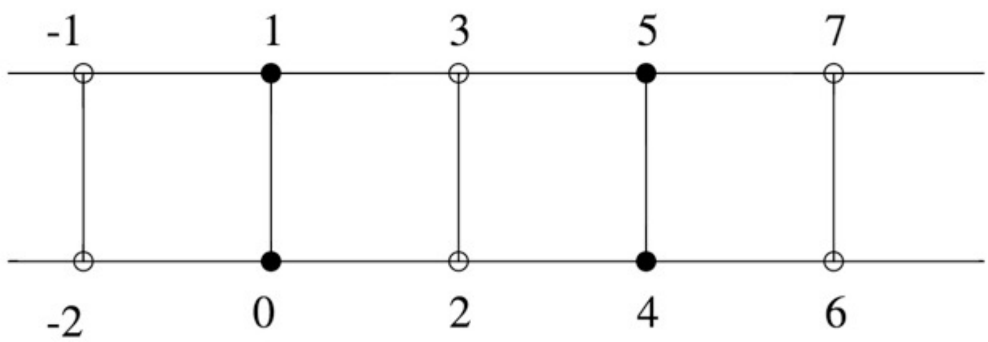
$$F = \int d^3r\{f_0 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2 + a(T - T_c)|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4\}$$

La cantidad $|\psi|^2$ es proporcional a la densidad de partículas superconductoras del gas de electrones. Encuentre la configuración del parámetro de orden $\psi(\vec{r})$ para el caso en el que el material está contenido en el semiespacio $x > 0$, en ausencia de campo magnético externo.

Parte II: grupo de renormalización

1. En el modelo de Ising en una dimensión, en lugar de sumar sobre los spines pares, se pueden definir otras formas de decimar el sistema. Por ejemplo, una posible forma de decimar es sumar sobre dos de cada tres spines. Es decir, los spines cuyo índice es un múltiplo de 3 (σ_3, σ_6, σ_9, $\ldots$) permanecen en la red, y los demás (σ_1, σ_2, σ_4, σ_5, $\ldots$) se suman. Muestre que para esta elección la transformación del grupo de renormalización también puede ser calculada en forma cerrada, y encuentre los puntos fijos.

2. Considere el modelo de Ising en escalera (ver figura).



Una forma posible de decimar el sistema es sumar sobre los spines con círculos blancos, dejando los spines con círculos negros. Calcule la transformación del grupo de renormalización y muestre que aparecen interacciones además de las de primeros vecinos.

3. Muestre que la transformación de decimación con $l = 2$ del modelo de Ising en una dimensión se puede escribir en términos de la matriz de transferencia q como

$$q(\mathbf{K}') = q^2(\mathbf{K}), \tag{1}$$

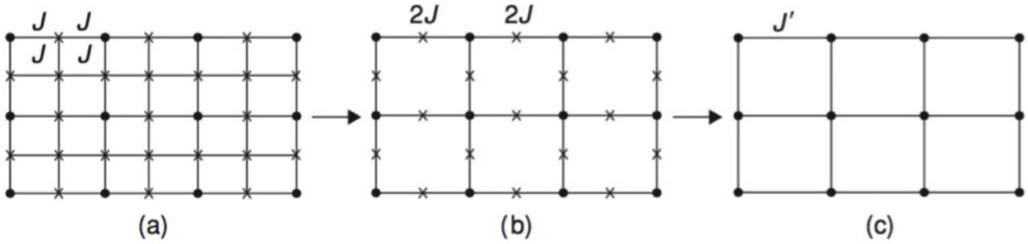
donde $\mathbf{K} = (K_0, K_1, K_2)$ y $\mathbf{K}' = (K_0', K_1', K_2')$ son las constantes de acoplo de la red original y la decimada respectivamente. Muestre entonces que, con q dada por

$$q(\mathbf{K}) = e^{K_0} \begin{bmatrix} e^{K_1+K_2} & e^{-K_1} \\ e^{-K_1} & e^{K_1-K_2} \end{bmatrix}$$

la ecuación (1) implica

$$\begin{aligned} e^{K_0'+K_1'+K_2'} &= 2e^{2K_0+K_2}\cosh(2K_1+K_2) \\ e^{K_0'+K_1'-K_2'} &= 2e^{2K_0-K_2}\cosh(2K_1-K_2) \\ e^{K_0'-K_1'} &= 2e^{2K_0}\cosh K_2. \end{aligned}$$

4. Una forma aproximada de implementar una transformación del grupo de renormalización en una red cuadrada es la llamada transformación de Migdal-Kadanoff, que se muestra en la figura.



La transformación consta de dos pasos. Primero, la mitad de los enlaces en la red simplemente se eliminan, de manera que la escala de longitud de la red se multiplica por 2; para compensar eso, la constante de acoplo de los enlaces restantes se cambia de J a $2J$. Eso nos lleva de la figura (a) a la figura (b). Y segundo, los sitios marcados con cruces en la figura (b) se eliminan por medio de transformaciones de decimación unidimensionales, lo cual lleva a la figura (c) con constante de acoplo J'.

(a) Muestre que la relación de recurrencia para un modelo de Ising de spin $1/2$ en una red cuadrada, de acuerdo con esta transformación, es

$$x' = 2x^2/(1+x^4),$$

donde $x = \exp(-2K)$ y $x' = \exp(-2K')$. Ignorando los puntos fijos triviales $x^* = 0$ y $x^* = 1$, muestre que un punto fijo no trivial de esta transformación es

$$x^* = \frac{1}{3}\left\{-1 + 2\sqrt{2}\sinh\left[\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)\right]\right\} \simeq 0.5437.$$

Compare con el valor real de x_c.

(b) Linealizando alrededor de este punto fijo no trivial, muestre que el autovalor λ de esta transformación es

$$\lambda = 2(1-x^*)/x^* \simeq 1.6785$$

y por lo tanto el exponente $\nu \simeq 1.338$. Compare con el valor real de ν.