

Midiendo temperaturas negativas

En la última clase vimos que un sistema formado por N partículas de dos niveles, ϵ y $-\epsilon$ (que pueden pensarse por ejemplo como espines en un campo magnético), puede encontrarse en equilibrio a temperatura negativa, y entre los estudiantes surgió la siguiente duda: ¿cómo medir una temperatura negativa con un termómetro convencional, que sólo puede estar a temperatura positiva? Vamos a tratar de responder a esta pregunta.

Antes que nada, una aclaración. Una condición necesaria para que un sistema pueda hallarse en equilibrio a temperatura negativa es que su energía esté acotada por arriba. En efecto, si la energía no está acotada por arriba la probabilidad $p(s) \propto e^{-\beta E(s)}$ del ensamble canónico no es normalizable a temperaturas negativas. El sistema de partículas de dos niveles cumple esta condición: su energía satisface $E \leq N\epsilon$. En cambio, los sistemas que solemos encontrar en la naturaleza no tienen la energía acotada por arriba, y por eso su temperatura es necesariamente positiva.

Ahora sí, vamos a lo nuestro: vamos a medir temperaturas negativas. Lo haremos con un termómetro estándar: un gas ideal. Por simplicidad, supondremos que este gas tiene el mismo número de partículas, N , que nuestro sistema de partículas de dos niveles. Supongamos que inicialmente tenemos el gas ideal a temperatura T_1 y el sistema de dos niveles a temperatura T_2 . T_1 es necesariamente positiva, mientras que T_2 puede ser negativa. Inicialmente, ambos sistemas están separados por una pared adiabática, así que no se mueven de donde están: están en equilibrio. Ahora cambiamos la pared adiabática por una pared diaterma, y entonces, después de esperar un tiempo, sus temperaturas deberían igualarse a algún valor T . Este valor es necesariamente positivo, porque un gas ideal no puede encontrarse a temperatura negativa. ¿Cuánto vale T ? Esto lo encontramos imponiendo conservación de la energía:

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = 0.$$

La energía del gas ideal es $U_1(T) = 3NkT/2$, mientras que, como vimos en clase, la del sistema de dos niveles es $U_2(T) = -N\epsilon \tanh[\epsilon/(kT)]$. Reemplazando en la ecuación de arriba obtenemos

$$\frac{3}{2}Nk(T - T_1) - N\epsilon\{\tanh[\epsilon/(kT)] - \tanh[\epsilon/(kT_2)]\} = 0.$$

Podemos reescribir esta ecuación de la siguiente forma:

$$T - \frac{2\epsilon}{3k} \tanh[\epsilon/(kT)] = T_1 - \frac{2\epsilon}{3k} \tanh[\epsilon/(kT_2)].$$

Fijémonos que la función de T que tenemos a la izquierda del igual es una función monótona creciente que toma valores entre $-2\epsilon/(3k)$ e infinito (recordemos que T tiene que ser positiva). Por otra parte, lo que tenemos al lado derecho del igual es un número mayor o igual que $-2\epsilon/(3k)$. Por lo tanto, para cada valor de T_1 (≥ 0) y T_2 esta ecuación tiene una solución única $T \geq 0$. ¿Cómo podemos averiguar si el sistema de partículas de dos niveles se encontraba a temperatura negativa antes de ponerlo en contacto térmico con el gas ideal? Muy sencillo: si $T_2 \geq 0$, entonces

$$T - \frac{2\epsilon}{3k} \tanh[\epsilon/(kT)] \leq T_1,$$

mientras que si $T_2 < 0$ entonces

$$T - \frac{2\epsilon}{3k} \tanh[\epsilon/(kT)] > T_1.$$

Así pues, ponemos los sistemas en contacto térmico y esperamos que se equilibren a una temperatura $T \geq 0$. Si T satisface la primera desigualdad de arriba entonces concluimos que el sistema de dos niveles estaba a temperatura positiva. Si, en cambio, T satisface la segunda desigualdad de arriba, entonces concluimos que el sistema de dos niveles se encontraba a temperatura negativa.