Segundo parcial de Física Teórica 3
29/6/2016

Problema 1

Un gas de N fermiones libres e idénticos, de masa m y spin s, está contenido en una caja de volumen V. Una mitad de la caja está a potencial 0 y la otra a potencial Δ, con $0 < \Delta \ll [\hbar^2/(2m)](N/V)^{2/3}$. El gas se encuentra en equilibrio a temperatura T.

(a) Calcule la energía de Fermi, ϵ_F, del sistema. (*Ayuda*: podría serle útil saber que $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$.)

(b) Encuentre la fracción de partículas en cada mitad de la caja en los casos $T \gg \epsilon_F/k$ y $T = 0$. Discuta sus resultados.

(c) Calcule la energía del sistema en los dos casos del item anterior.

Problema 2

Considere un sistema de partículas idénticas de spin 0 que no interactúan entre sí. Las partículas se mueven en un espacio de d dimensiones y están atrapadas en una trampa armónica de frecuencia angular ω, de manera que las energías monoparticulares son

$$\epsilon = \hbar\omega(n_1 + \cdots + n_d),$$

donde $n_1, \ldots, n_d$ son números naturales y el origen de energías se ha elegido convenientemente.

(a) Calcule la función de partición grancanónica del sistema, suponiendo que $\beta\hbar\omega \ll 1$. (*Ayuda*: puede serle útil saber que $(m+k)!/m! \simeq m^k$ cuando $m \gg k$, o bien, según cómo afronte el problema, que el área de una esfera de radio 1 en un espacio de $2d$ dimensiones es $2\pi^d/\Gamma(d)$.)

(b) ¿Qué condición debe satisfacer d para que haya condensación de Bose-Einstein? Asumiendo que se satisface esa condición, calcule la temperatura crítica del sistema, T_c, en función del número de partículas N (que como siempre asumimos arbitrariamente grande).

(c) Calcule y grafique la fracción de partículas en el estado fundamental, f, en función de la temperatura T y en términos de T_c.

(d) Calcule y grafique el calor específico, c_V, del sistema en función de T y en términos de T_c, en los casos $T \leq T_c$ y $T \gg T_c$. Discuta sus resultados.

Problema 3

Considere el modelo de Potts en una dimensión, cuyo hamiltoniano es

$$H(s_1, \ldots, s_N) = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i s_{i+1}},$$

donde J es una constante positiva, δ_{kl} es la delta de Kronecker ($\delta_{kl} = 1$ si $k = l$ y $\delta_{kl} = 0$ si $k \neq l$) y, para cada $i = 1, \ldots, N$, s_i puede tomar $q \geq 2$ valores distintos.

(a) Obtenga las ecuaciones del grupo de renormalización correspondientes a decimar el sistema sumando sobre todos los sitios pares. (*Ayuda*: tenga en cuenta que $e^{\alpha\delta_{kl}} = 1 + \delta_{kl}(e^{\alpha} - 1)$.)

(b) Definiendo $x = e^{-K}$, donde $K = \beta J$, escriba la ecuación $x' = R(x)$ que describe cómo cambia x bajo el grupo de renormalización. Encuentre los puntos fijos y estudie su estabilidad. Discuta sus resultados.