

Critical_3b



侍

Funciones de correlacion

A partir de experimentos de scattering se obtiene que para r grande comparado con la "distancia intermolecular y

$$T = T_c$$

$$g_c^{(2)}(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r^{(d-2+\eta)}}$$

con $0 \leq \eta \leq 0.1$

Lejos de T_c es una funcion complicada

Para $\epsilon = |T - T_c|/T_c \ll 1$ y r grande

$$g_c^{(2)}(\mathbf{r}) \sim \exp\left(-\frac{r}{\xi}\right)$$

Donde ξ es la **distancia de correlacion**

Esto significa que la magnitud relevante fluctua en bloques de todos los tamaños hasta ξ y fluctuaciones mas grandes son muy raras

Experimentalmente se verifica que

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

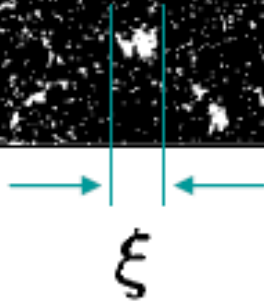
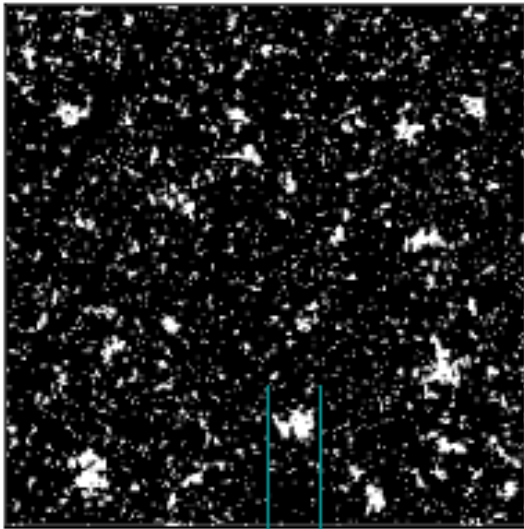
con $(|T - T_c|/T_c \ll 1)$

En suma:

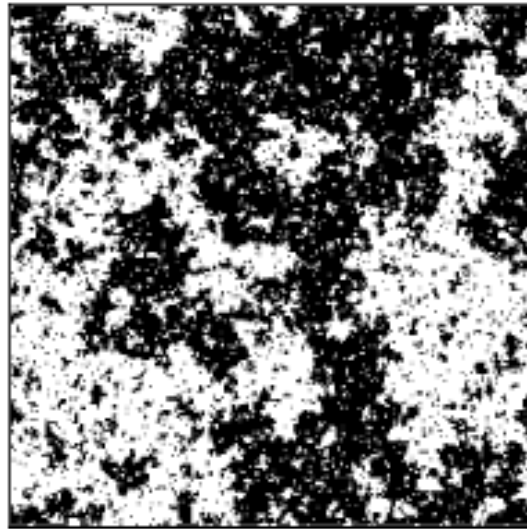
Por encima o debajo de T_c correlaciones de largo rango son exponencialmente improbables

En T_c , son potenciales.

$$T < T_c$$

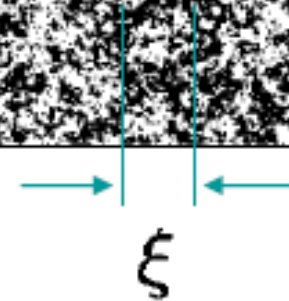
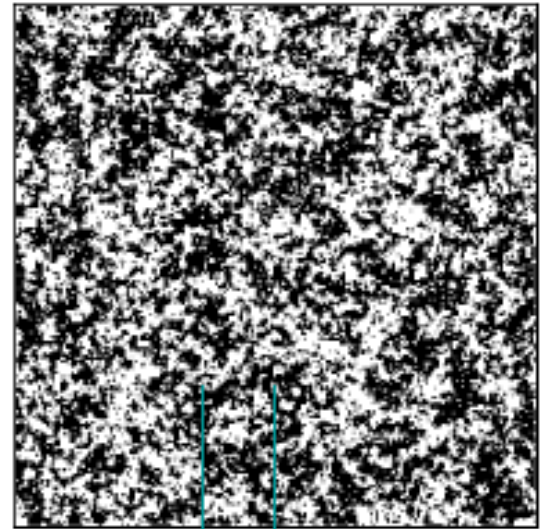


$$T \simeq T_c$$



$$\xi \simeq \infty$$

$$T > T_c$$



Cual es cual?

Construcción de Kadanoff

Sea un sistema de Ising con un Hamiltoniano
(en unidades de kT)

$$\beta H = -J \sum_{\{i,j\}} s_i s_j - h \sum_{i=1} s_i$$

Kadanoff considera la siguiente situación:

1) Sea a la "distancia" entre dos spines vecinos (constante de la red).

Definimos celdas de tamaño La con $L \gg 1$.

2) El número de celdas es $n=N/L^d$

3) Sea $|T - T_c|/T_c \ll 1$ y por lo tanto $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$ como $\nu \sim \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\xi \text{ es muy grande}} \gg La$

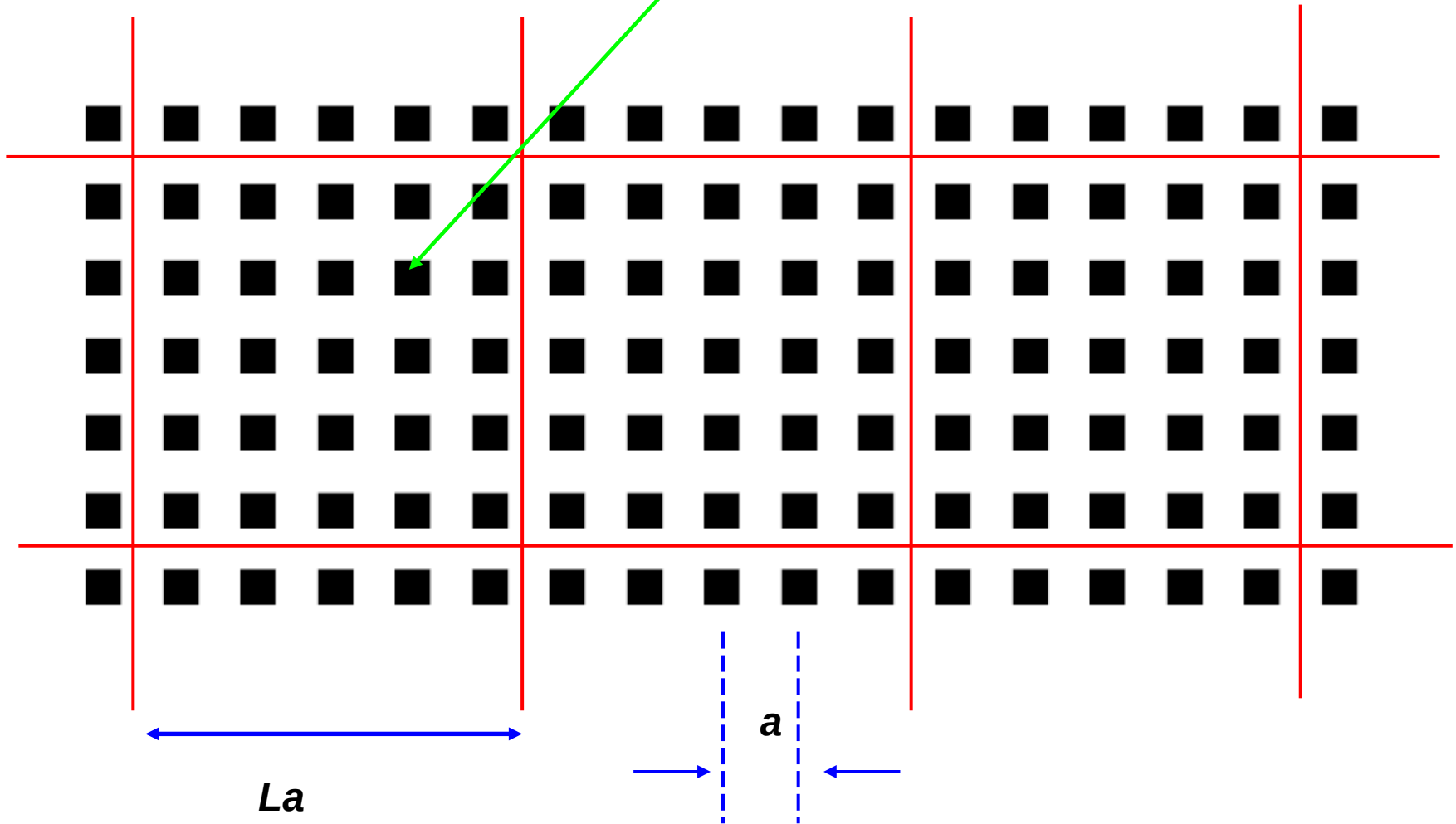
Cada celda contiene L^d spines (d es la dimension)

Como $1 \ll L \ll \xi/a$ en un cluster de spines correlacionadas habrá muchas celdas.

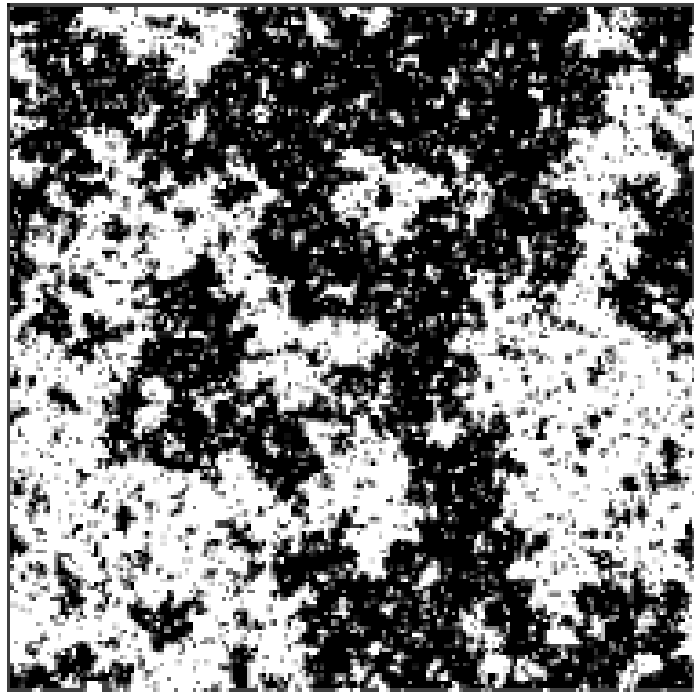
ESTRUCTURA DE CELDAS

Con $L=5$

L^2 spines = 25



$$T \simeq T_c$$



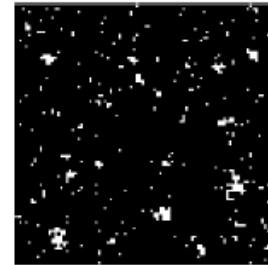
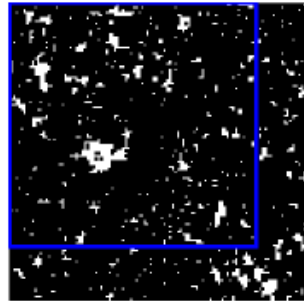
$$\xi \simeq \infty$$

- Rotulamos las celdas con $\alpha = 1, 2, 3, \dots$
- A cada celda α le asociamos un momento magnetico $\tilde{S}_\alpha$
- Suponemos ahora que $\tilde{S}_\alpha$ se comporta como un spin s_i i.e. estara $\uparrow$ o $\downarrow$. Como las celdas estarán muy correlacionadas los spines individuales estaran "apuntando basicamente en la misma dirección"

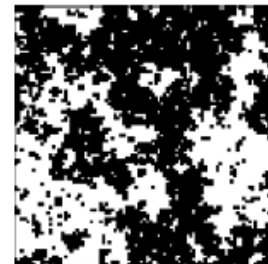
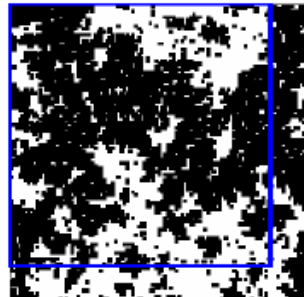
De esta forma podemos pensar en reformular nuestro problema en termino de las celdas (y sus spines efectivos).

Al ser "equivalentes" es de esperar que el hamiltoniano del sistema resultante sea de la misma forma (pero con coeficientes diferentes)

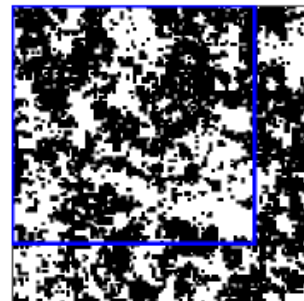
- In the ordered phase ($T < T_c$)



- Near the critical point ($T \simeq T_c$)



- In the disordered phase ($T > T_c$)



Entonces, si tenemos dos sistemas con hamiltonianos de la misma forma, esperamos que las funciones termodinamicas de ambos sistemas sean similares (a menos de diferencias en parametros).

Proponemos entonces para la energia libre de Gibbs

$$\overline{G}(\tilde{\epsilon}, \tilde{h}) = L^d \overline{G}(\epsilon, h)$$

donde $\overline{G}(\tilde{\epsilon}, \tilde{h}) \rightarrow$ es el Gibbs **por celda**

donde $\overline{G}(\epsilon, h) \rightarrow$ es el Gibbs **por spin**

Relacionamos ahora $(\tilde{\epsilon}, \tilde{h})$ con (ϵ, h)

Es de esperar que

$$\tilde{h} = H(L)h$$

donde $H(L)$ es una constante de proporcionalidad dependiente de L

Cambia la
Distancia
Al punto
Critico!

Del mismo modo

$$\tilde{\epsilon} = T(L)\epsilon$$

Que es esto?

Kadanoff propone

$$H(L) = L^x \quad T(L) = L^y$$

con x, y numeros arbitrarios.

(con esto tomamos en cuenta que no todos esten alineados, etc.)

De esta forma

$$\overline{G}(L^y \epsilon, L^x h) = L^d \overline{G}(\epsilon, h)$$

Por spin

y esto es una función homogenea generalizada!!!!!!

De donde

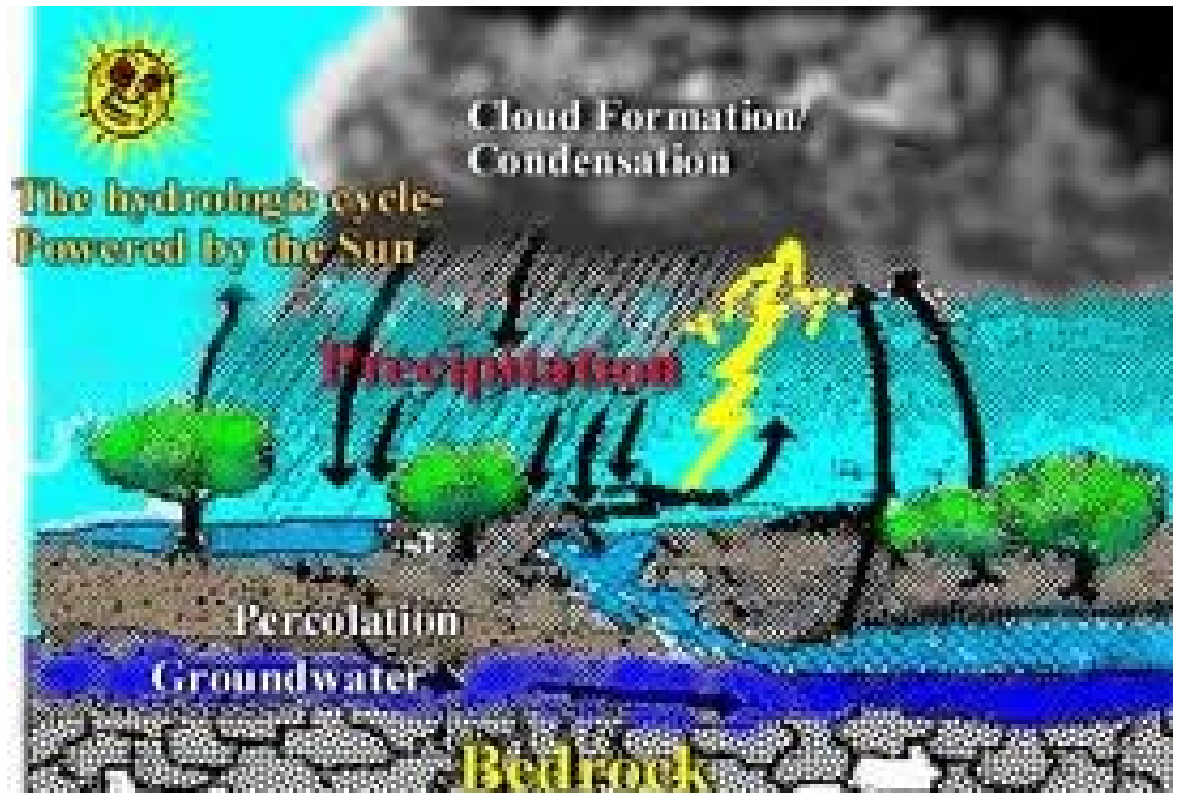
$$\overline{G}(L^{y/d} \epsilon, L^{x/d} h) = L \overline{G}(\epsilon, h)$$

Pero esta es la hipotesis de escaleo estatica con

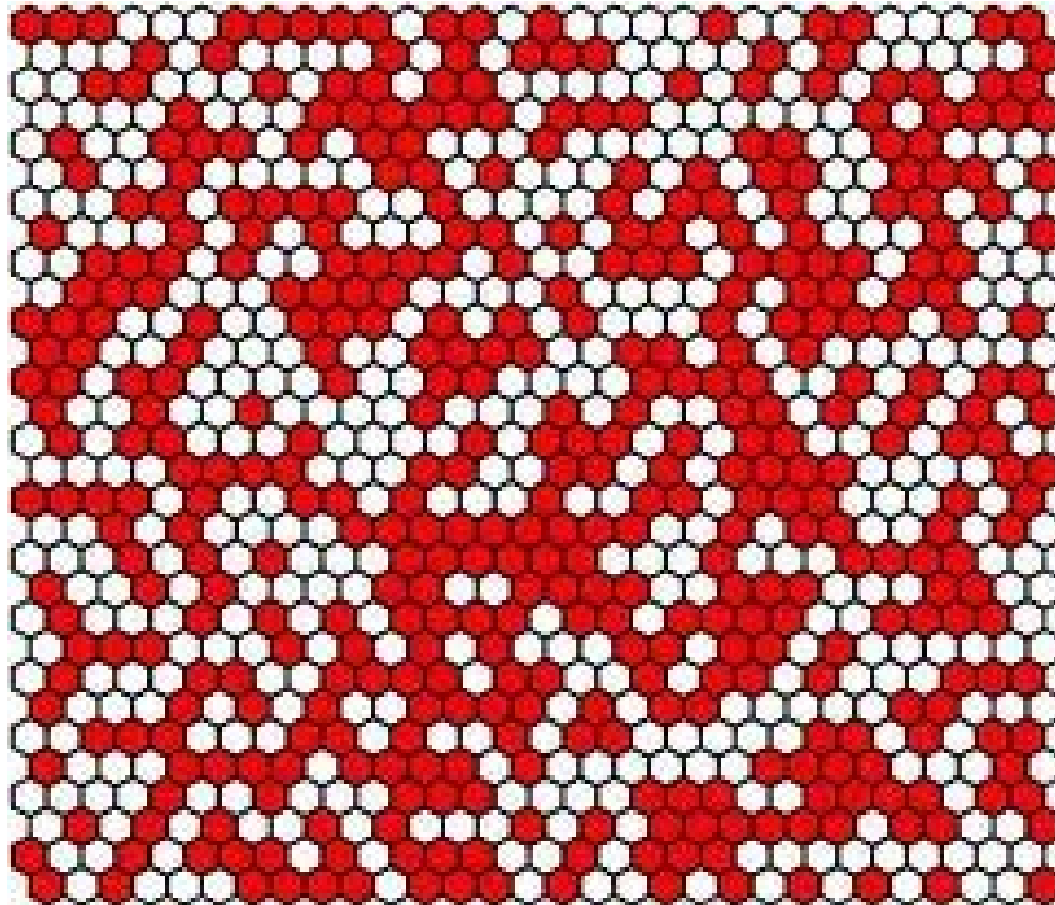
$$p = \frac{y}{d} \quad q = \frac{x}{d}$$

Primero veamos algo simple

Percolacion

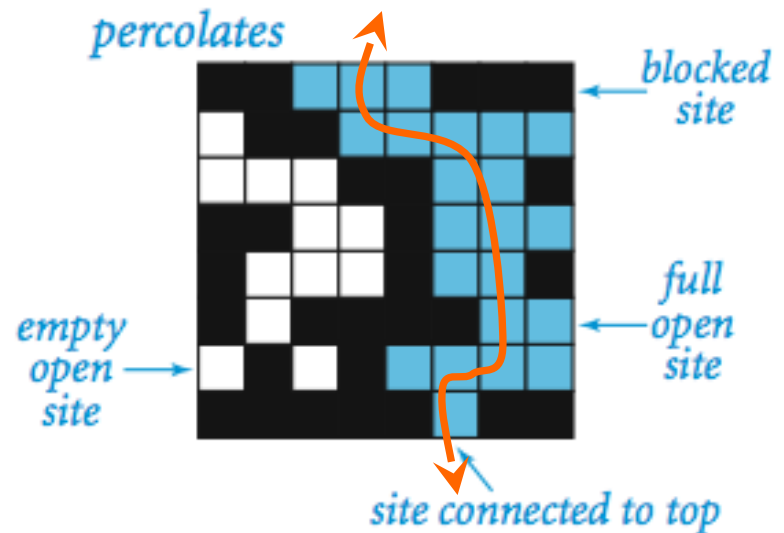
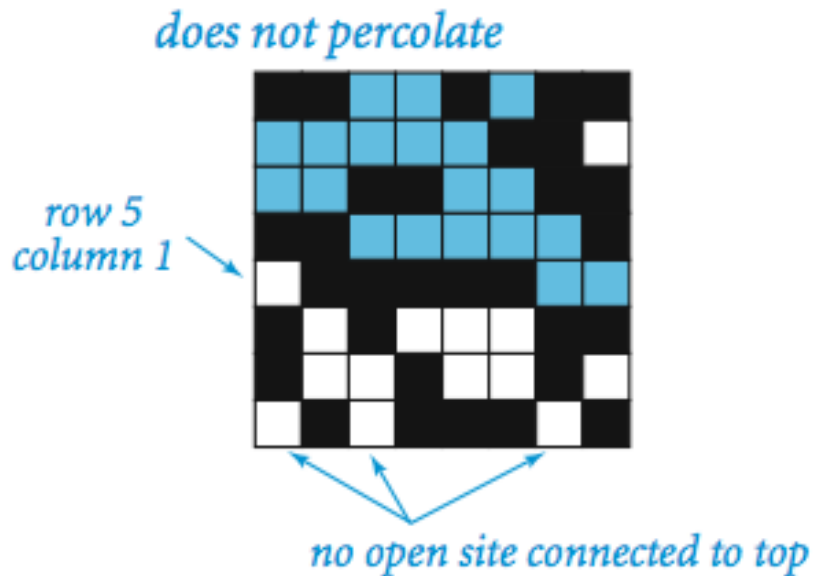


red triangular
un punto es rojo con probabilidad p



Que es percolar?

Para una red cuadrada :



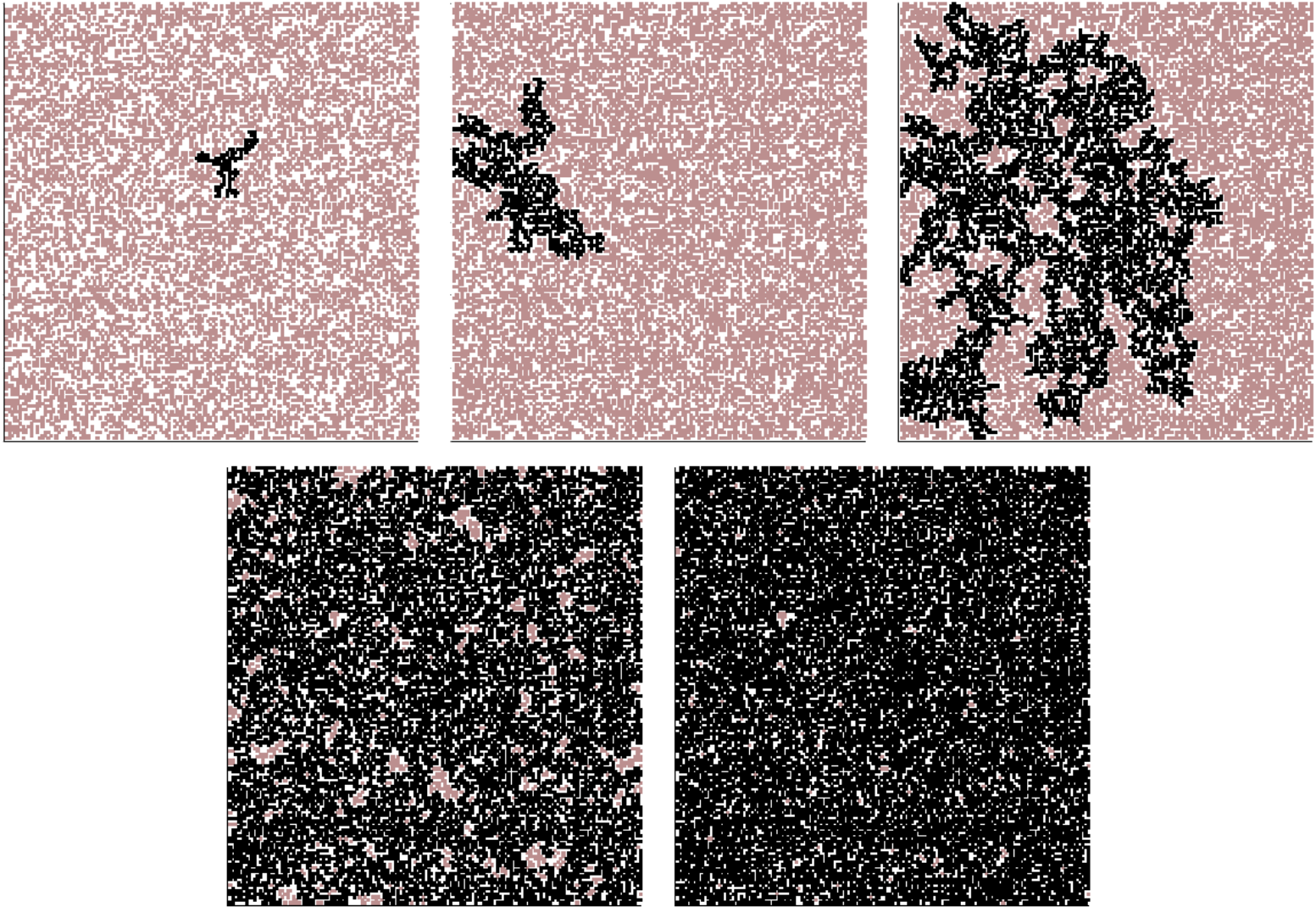


Figure 1.2: Percolation in $2d$ square lattices with system size $L \times L = 150 \times 150$. Occupation probability $p = 0.45, 0.55, 0.59, 0.65$, and 0.75 , respectively. Notice, that the largest cluster *percolates* through the lattice from top to bottom in this example when $p \geq 0.59$.

En un problema de percolacion se pueblan o activan nodos/links con Una cierta probabilidad p

Algunas propiedades :

a) La fuerza del cluster percolante (parametro de orden)

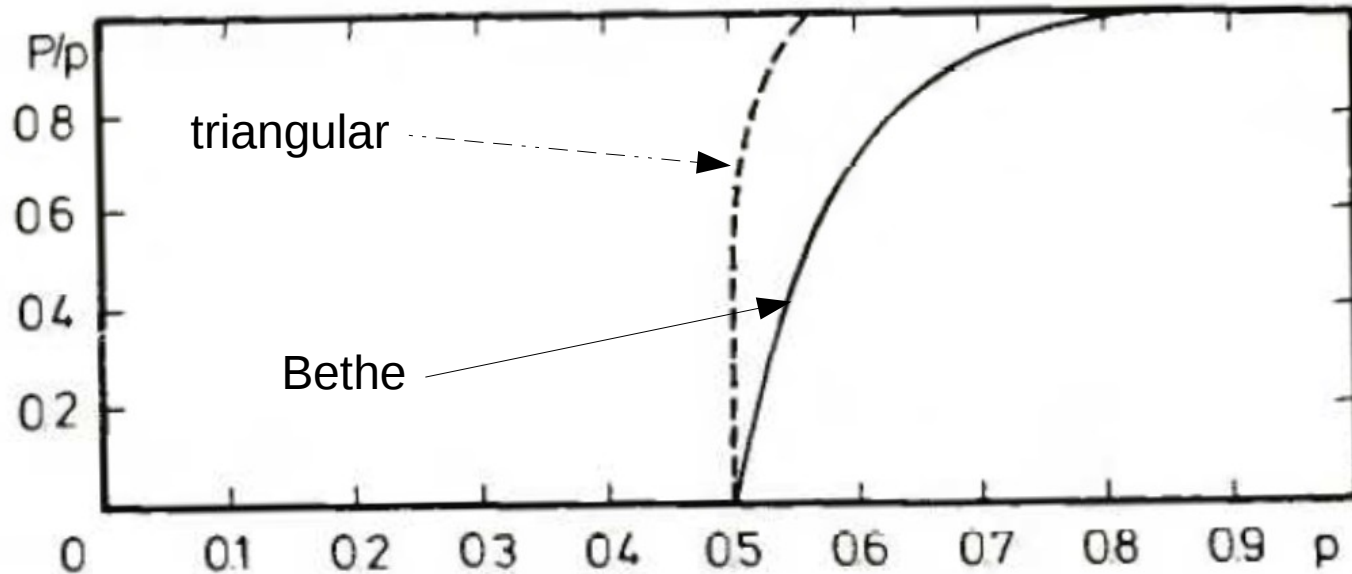
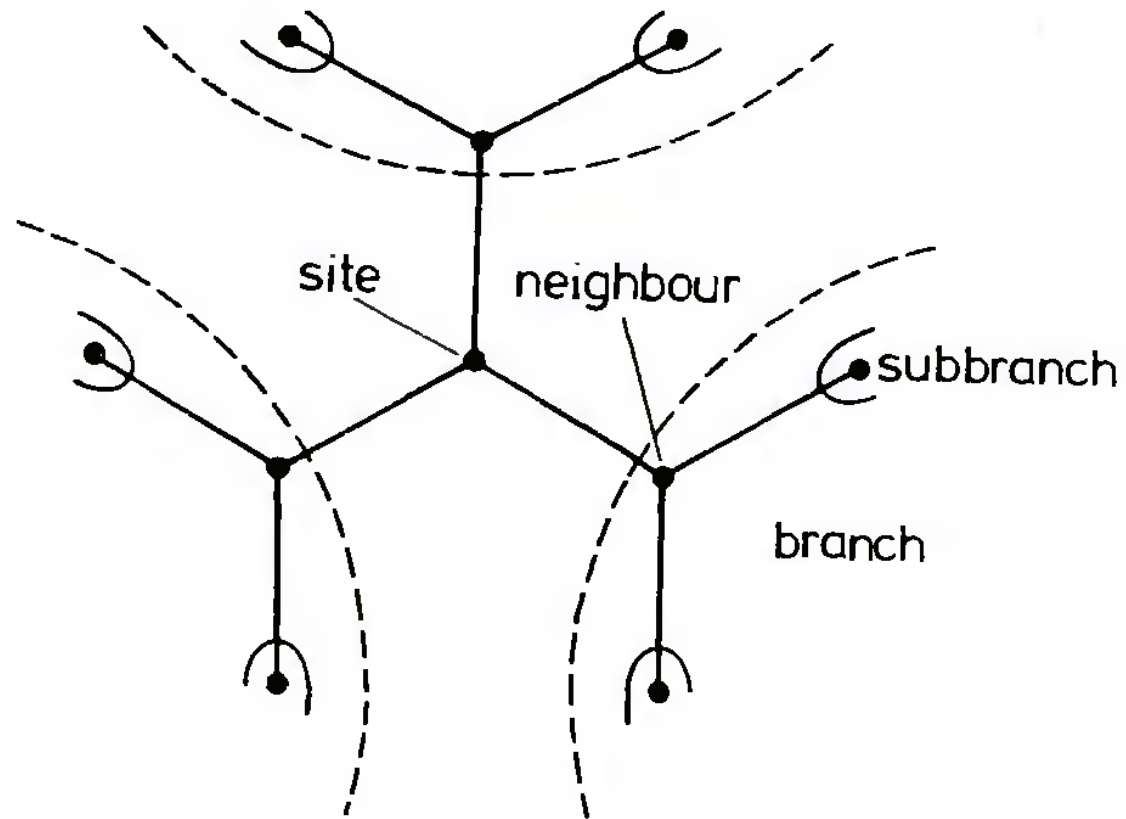


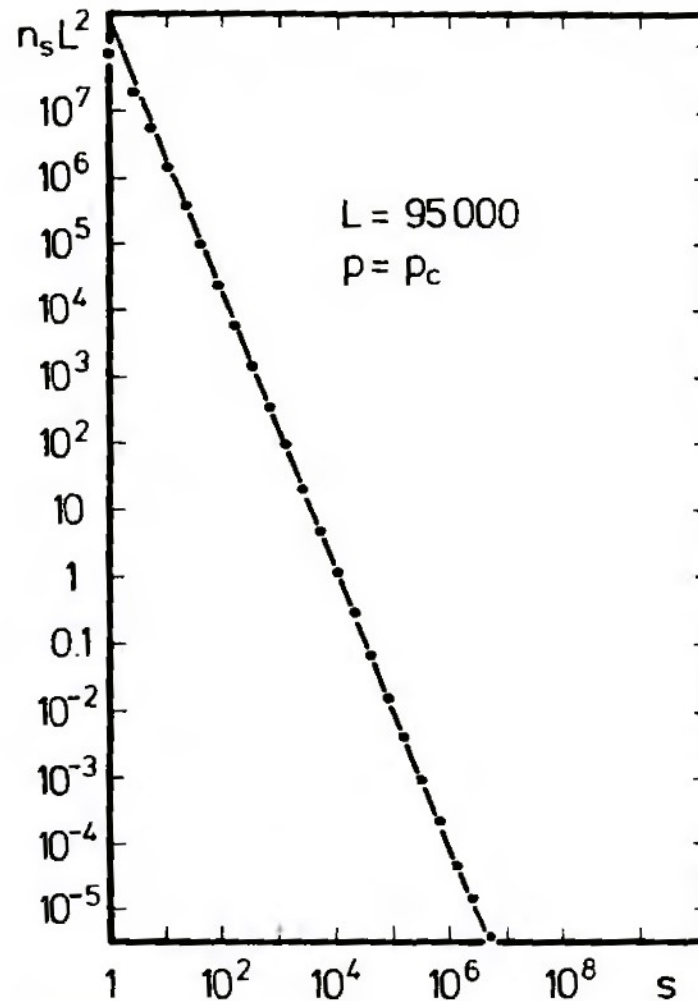
Fig. 11. Order parameter P (strength of the infinite network) versus concentration p , in the Bethe lattice with $z = 3$. From equation (16) shown as a solid line and compared with computer simulations of the triangular lattice (dashed line). In both cases the threshold is at $p_c = 1/2$.

Red de Bethe



b) $n_s(p_c)$

$$f = x^a \Rightarrow \ln(f) = a \ln(x)$$



$$n_s(p_c) \propto s^{-\tau}$$

Fig. 12. High-quality data on cluster numbers at the percolation threshold, based on one simulation of a $95\,000 \times 95\,000$ triangular lattice. The slope of the straight line in this log-log plot gives $-\tau$, the Fisher exponent of Eq. (20). From Margolina *et al.* (1984); see also Rapaport (1985, 1992).

$S(L)$

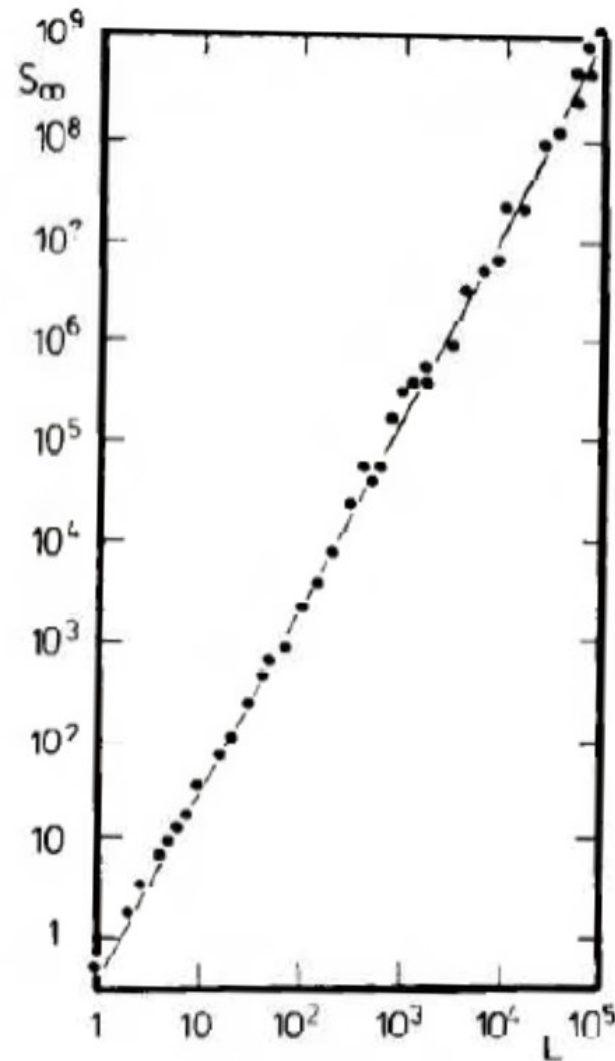
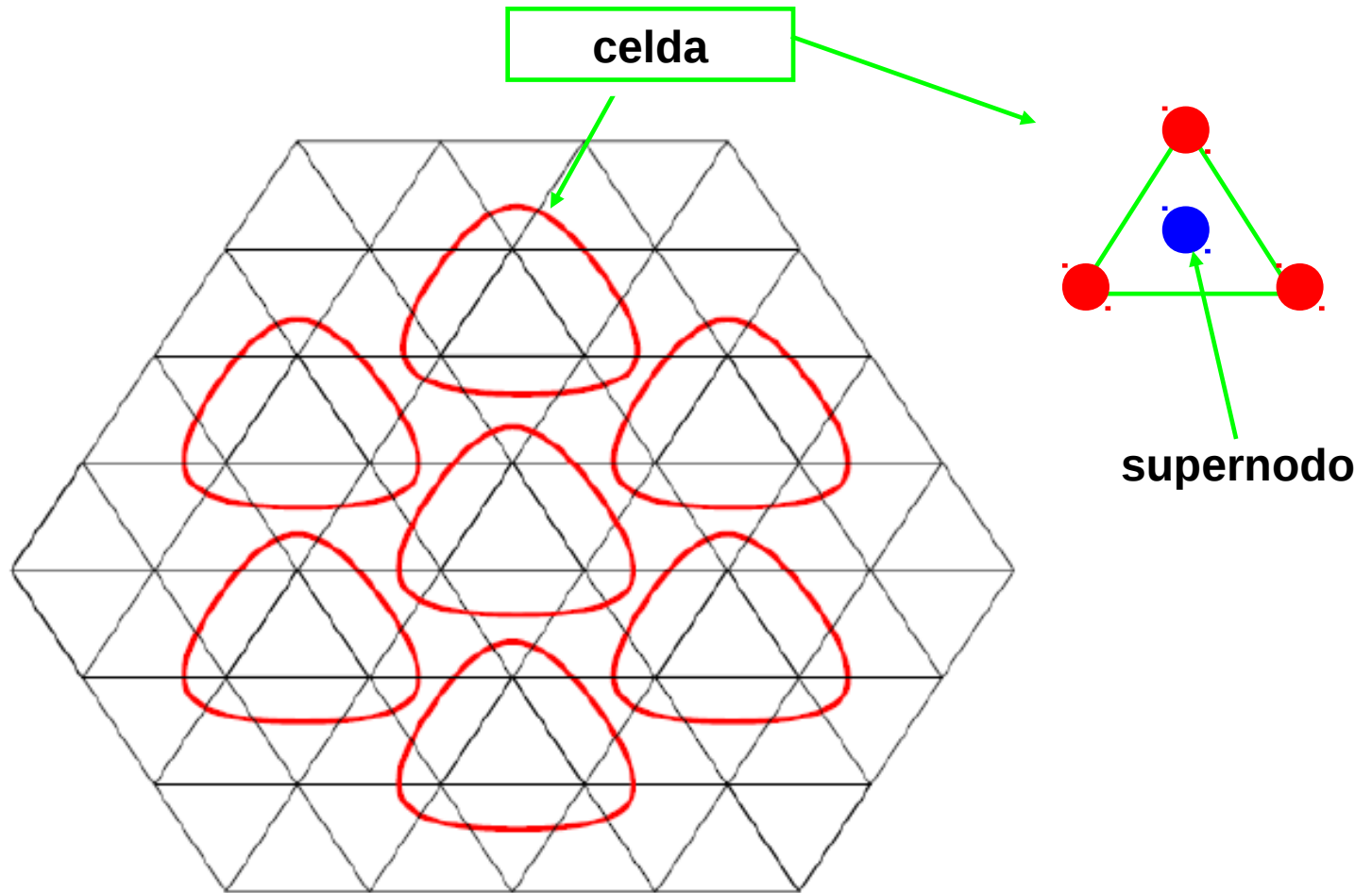


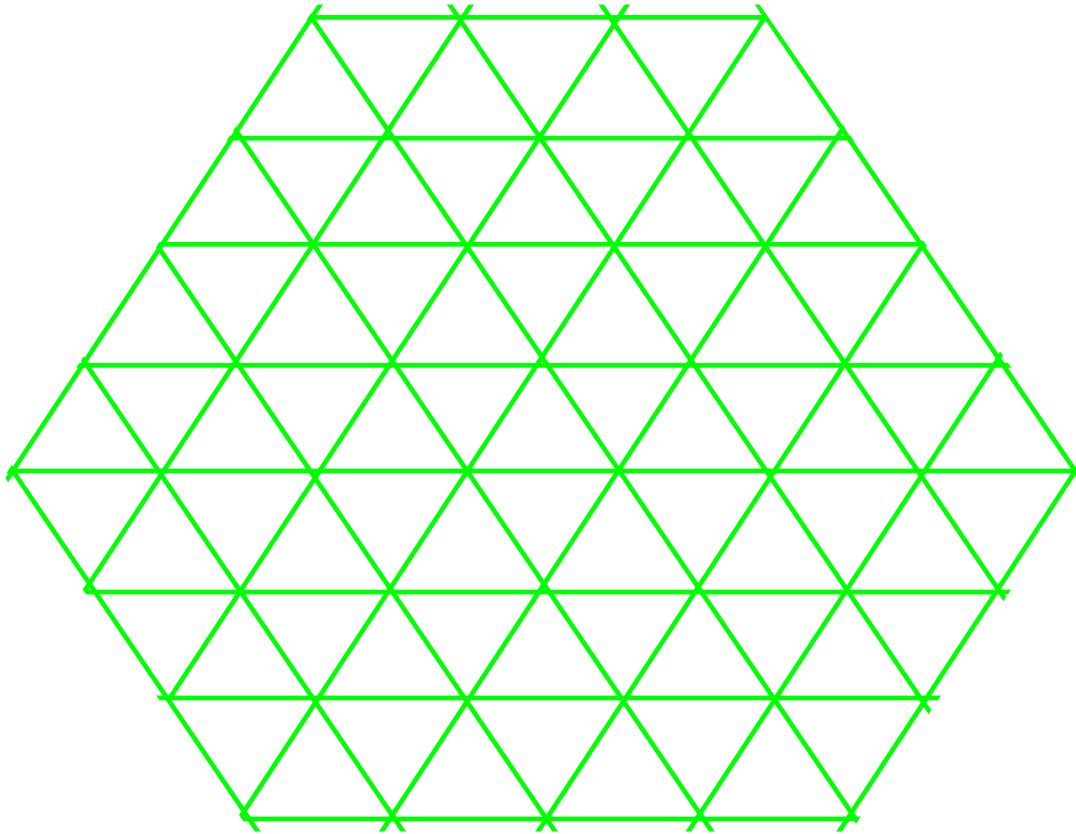
Fig. 15. Monte Carlo data for the size of the largest cluster at the site percolation threshold $p = p_c = 1/2$ of the triangular lattice, as a function of the linear dimension L of the lattice. The slope of this log-log plot for large sizes gives the fractal dimension $D = 91/48 \approx 1.9$.

Renormalizacion en percolacion

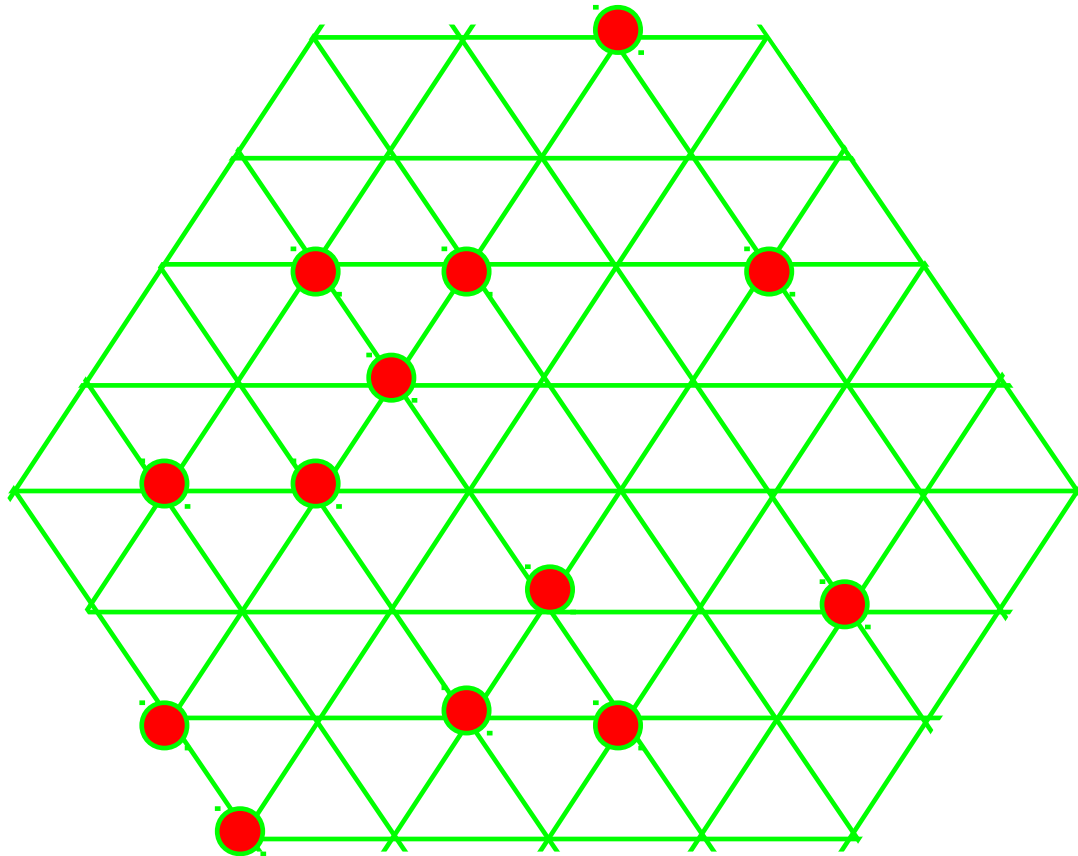
Sea una red triangular



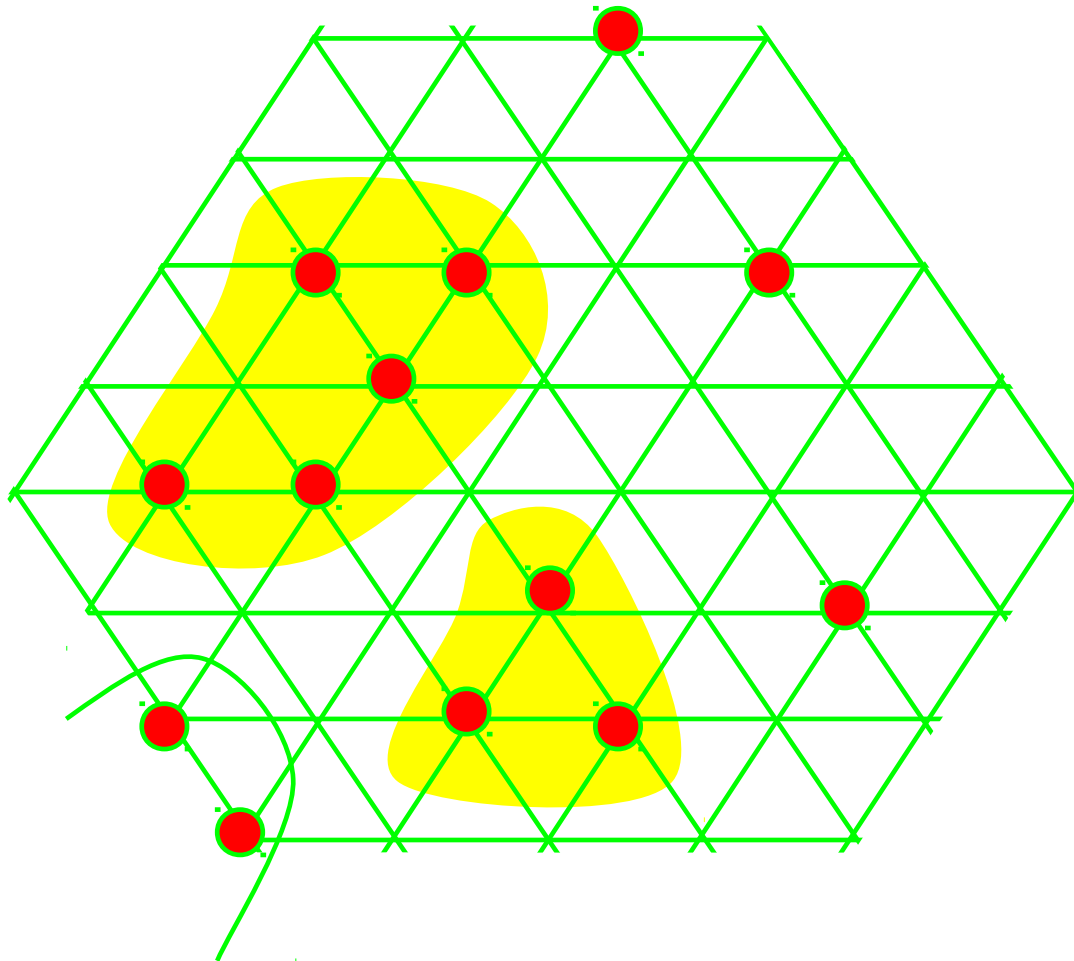
Red “vacía”



**Activamos nodos
Con probabilidad p**



Reconocemos clusters



Renormalizacion de celda pequeña en percolacion

La distancia de correlacion se comporta en la vecindad del punto critico como:

$$\xi = (p - p_c)^{-\nu} \quad \#$$

En el punto critico el cluster percolante es autosimilar?

- Supongamos un proceso en el cual dividimos nuestra lattice en celdas y a cada celda le asignamos estado ocupado o vacio con algun criterio.
- Pensamos en la red triangular, formamos celdas con tres nodos que forman triangulos. El resultado de aplicar esto sobre toda la red y el resultado es una nueva red triangular.



En este caso estamos escalenado con una "distancia tipica" $b = \sqrt[3]{3}$ pues $b^2 = 3$ que es el numero de nodos que contiene la celda.

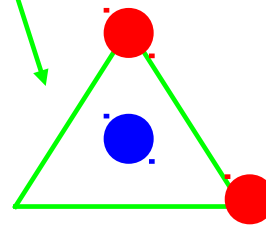
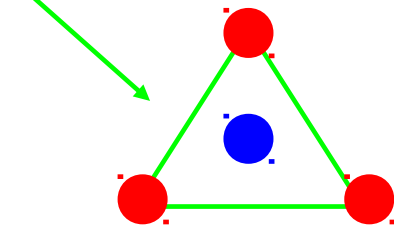
$$b \ll \xi$$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estaran ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupacion de estos nuevos supernodos es

$$p' = p^3 + 3p^2(1 - p)$$

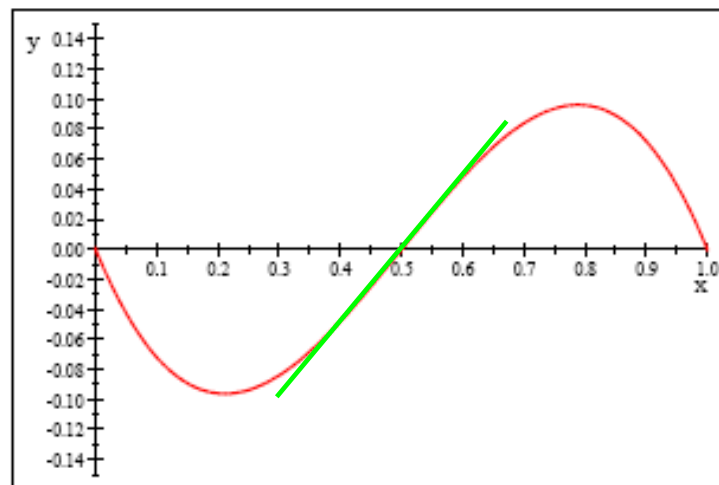
Donde

p^3 corresponde a la proba de tener los 3 nodos originales ocupados



$p^2(1-p)$ es la proba de tener 2 ocupados y 1 vacío. El 3
enfrente corresponde a las 3 posibles formas de hacer esto

Si estudiamos $(p' - p)$ vemos que:



De donde se ve que p' es invariante para $p = 0$ y $p = 1$, que son triviales (la vacía queda vacía y la llena queda llena).

Pero hay otro punto interesante que es $p = 0.5 = p_c$ es decir el

punto critico donde esta el cluster percolate que es una fractal es tambien invariante!

A la p invariante la llamamos punto fijo p^*

(realizo un “escaleo” en el espiritu anterior)

Vemos aqui que al cambiar la dimension de la red en b la dimension lineal de la lattice pasa a ser L/b .

La masa del cluster en la nueva lattice es

$$M(L/b) \propto (L/b)^D$$

$$M(L) \propto L^D$$

dim. fractal #

entonces

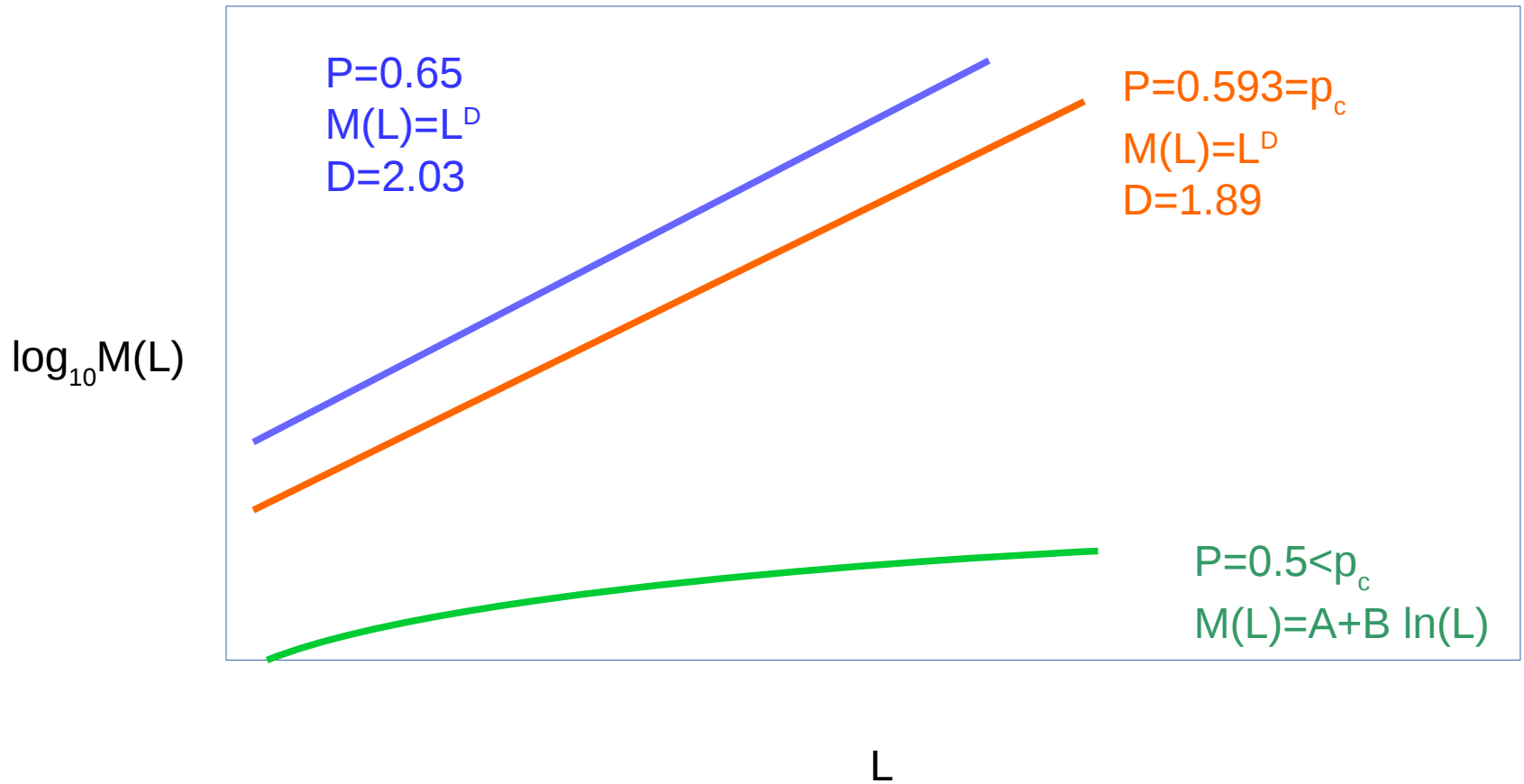
$$M(L) = b^D M(L/b) \quad \#$$

pero esto significa que $M(L)$ es una funcion homogenea, luego

$$M(L) \propto L^D \quad \#$$

O sea una ley de potencias

La masa del cluster mas grande como función del tamaño de la “ventana” ($L \times L$) con la cual se mira



Que pasa con la distancia de correlación ante el proceso de renormalización

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\xi' = \xi/b$$

Si ξ es FINITO al hacer la transformacion ξ' es mas pequeño $\Rightarrow$ nos alejamos del punto critico!!!

De donde

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu}$$

por lo que

$$\ln(b) + \ln(|p' - p_c|^{-\nu}) = \ln(|p - p_c|^{-\nu})$$

$$\Rightarrow -\nu[\ln(|p - p_c|) - \ln(|p' - p_c|)] = \ln(b) \Rightarrow$$

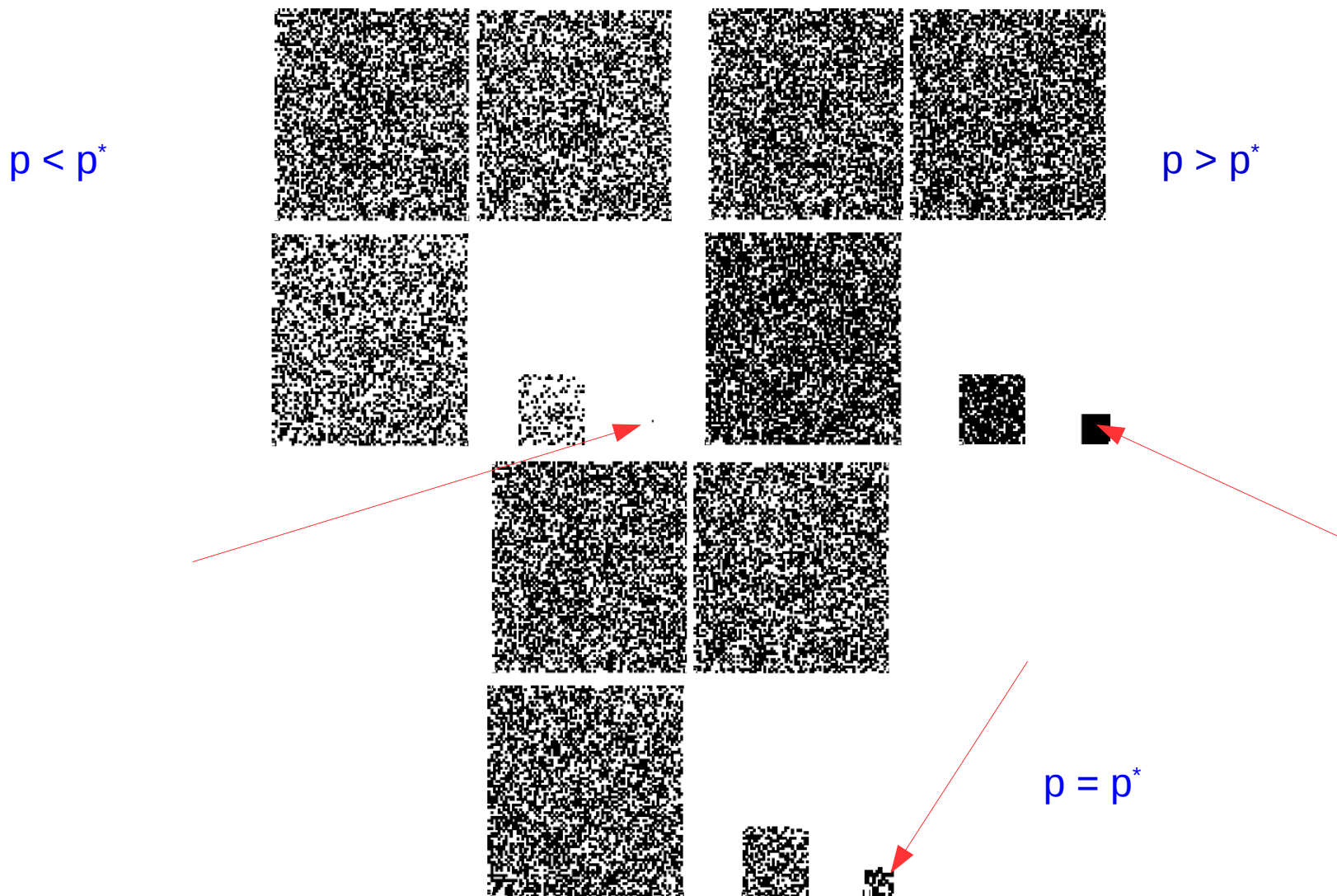
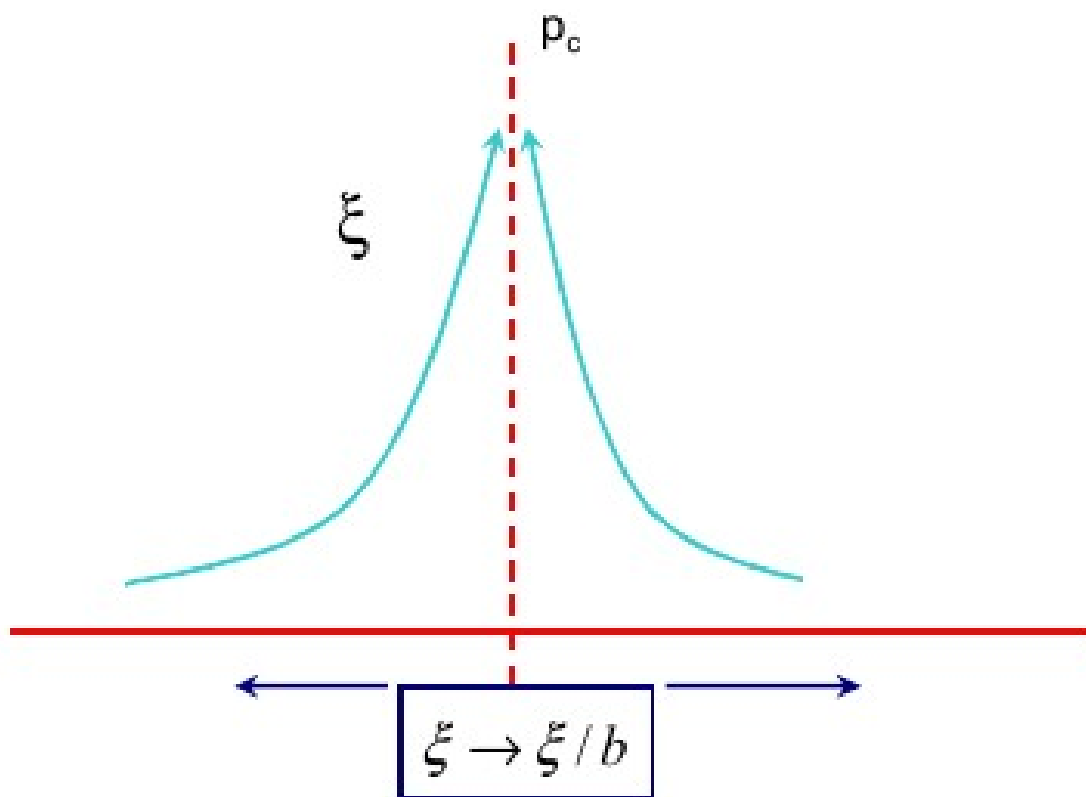


Figure 1.16: Renormalisation group method on a $2d$ square lattice according to the majority rule for 3×3 blocks. Shown are part of the original lattice $L = 729$ and the renormalised lattices $L = 243$ (part of), $L = 81, 27$, and 3 . (a) Initial occupation probability $p < p^*$ in the original lattice and the flow is towards the empty lattice. (b) Initial occupation probability $p > p^*$ in the original lattice and the flow is towards the fully occupied lattice. (c) Initial occupation probability $p = p^*$ in the original lattice. This is a fixed point for the renormalisation group transformation and consequently there is no flow. It looks like itself on all length scales.



Que pasa con la distancia de correlación ante el proceso de renormalización

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\xi' = \xi/b$$

Si ξ es FINITO al hacer la transformacion ξ' es mas pequeño $\Rightarrow$ nos alejamos del punto critico!!!

De donde

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu}$$

por lo que

$$\ln(b) + \ln(|p' - p_c|^{-\nu}) = \ln(|p - p_c|^{-\nu})$$

$$\Rightarrow -\nu[\ln(|p - p_c|) - \ln(|p' - p_c|)] = \ln(b) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{v} = \ln \left[\frac{(p' - p_c)}{(p - p_c)} \right] \frac{1}{\ln(b)} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

De donde

$$\frac{(p' - p_c)}{(p - p_c)} = \frac{dp'}{dp} = \lambda$$

Volviendo al caso de la red triangular en celda pequeña obtenemos
que podemos escribir p' en un entorno de p^* como (desarrollo lineal)

$$\begin{aligned} p' &= p^* + (dp'/dp)(p - p^*) + O(p - p^*) \\ &= p^* + \lambda(p - p^*) + O(p - p^*) \end{aligned}$$

Calculando λ obtenemos:

$$\lambda = (dp'/dp) = 3p^2 + 6p(1 - p) - 3p^2 = 6p(1 - p)$$

$$(p' = p^3 + 3p^2(1 - p))$$

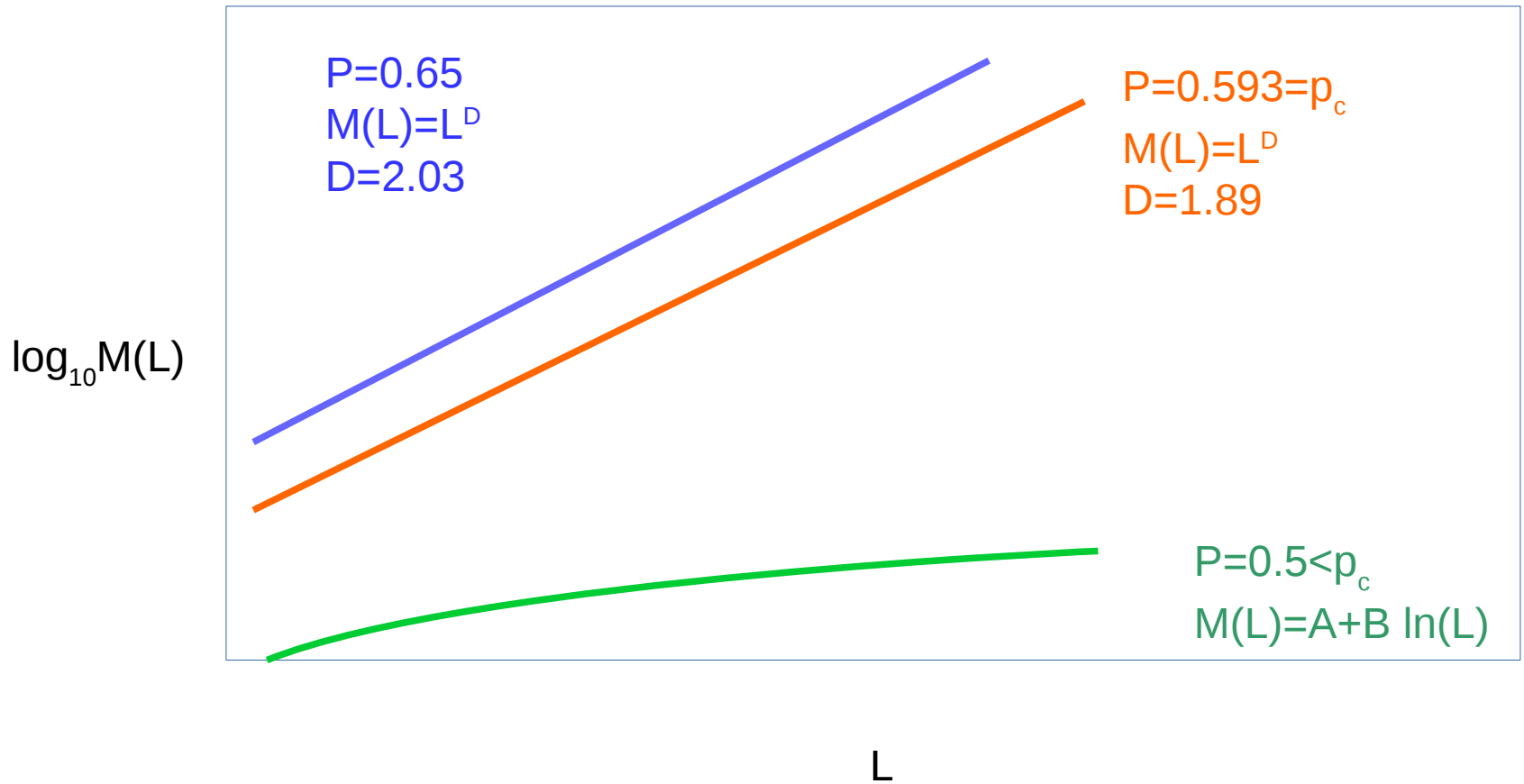
En $p_c = 1/2$ obtenemos $3/2$ de donde

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln \lambda}{\ln b} = \frac{\ln(1.5)}{\ln(\sqrt[3]{3})} = 0.73814 \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{1}{0.73814} = 1.3548$$

Resulta que se parece al valor exacto $\nu = 4/3$ (J. Phys.A12,(1979),1857.)

La masa del cluster mas grande como función del tamaño de la “ventana” ($L \times L$) con la cual se mira



Kadanoff y la función de correlación

Modelo de nodos

Sea

$$g^{(2)}(r, \epsilon) \equiv \langle (s_i - \langle s \rangle)(s_j - \langle s \rangle) \rangle = \langle s_i s_j - s_i \langle s \rangle - s_j \langle s \rangle + \langle s \rangle^2 \rangle \\ = \langle s_i s_j - \langle s \rangle^2 \rangle$$

Modelo de celdas

Sea $g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) \equiv \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle)(\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle$

con $\tilde{r} = r/L$

Sea

$$L^{-d} \sum_{i \in \alpha} s_i = \mathcal{L} \tilde{s}_\alpha$$

Que define al parametro como no todos los spines estan perfectamente alineados

Con $\tilde{s}_\alpha = \pm 1$

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) &= \frac{1}{L^{2d} \mathcal{L}^2} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} [\langle s_i s_j \rangle - \langle s \rangle^2] \\ &= \frac{1}{L^{2d} \mathcal{L}^2} L^{2d} [\langle s_i s_j \rangle - \langle s \rangle^2] \end{aligned}$$

$$\tilde{s}_\alpha = \frac{1}{L^d \ell} \sum_{i \in \alpha} s_i$$

Luego

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \mathcal{L}^2 g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon})$$

Nos fijamos ahora en el acoplamiento

Para las celdas (energía según el modelo de celdas)

$$\beta \hat{H}_{cell} = -\tilde{h} \sum_{\alpha=1}^n \tilde{s}_{\alpha}$$

Para los nodos
(energía según el modelo de nodos)

$$\beta \hat{H}_{nodo} = -h \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i \in \alpha} s_i$$

Suma sobre celdas

Suma en c/celda

$$= -h \sum_{\alpha=1}^n \tilde{s}_{\alpha} L^d \mathcal{L} \quad (\text{según se vio})$$

Entonces

$$\tilde{h} = L^d \mathcal{L} h$$

Proponemos ahora que $\mathcal{L}$ solo depende de L de la forma L^z como (como ya vimos)

$$\tilde{h} = H(L)h \quad H(L) = L^x \quad \mathcal{L} = L^z$$

Entonces

$$z = x - d$$

de donde recordando que

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \mathcal{L}^2 g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon})$$

y

$$\tilde{\epsilon} = L^y \epsilon \quad \text{y} \quad \tilde{r} = r/L$$

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = L^{2(x-d)} g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) = L^{2(x-d)} g^{(2)}(L^{-1}r, L^y \epsilon)$$

Suponiendo que esto es valido $\forall L$ obtenemos otra función homogenea.

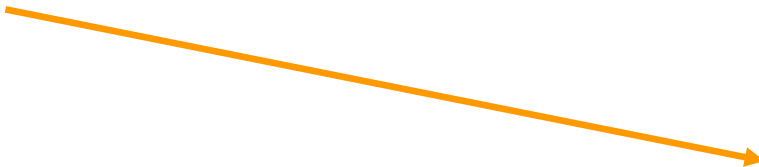
Si tomamos $L = (\frac{1}{\epsilon})^{1/y}$, entonces

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \epsilon^{2(-x+d)/y} g^{(2)}(r\epsilon^{1/y}, 1) = \epsilon^{2(-x+d)/y} f(r\epsilon^{1/y})$$

Si tomamos $L = (\frac{1}{r})$, entonces

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \epsilon^{2(x-d)} f(\epsilon r^y)$$

Pero entonces como $\xi \sim \epsilon^{-\nu}$ y $g^{(2)}(r, \epsilon = 0) \sim r^{-(d-2-\eta)}$ se obtiene



$$-(d - 2 - \eta) = 2(x - d)$$

$$v = 1/y$$

Usando este tipo de argumentos se obtiene

$$dv = 2 - \alpha$$

("desigualdad" de Josephson)

$$d - 2 - \eta = \frac{2\beta}{v}$$

("desigualdad de Fisher")

ademas

$$(2 - \eta)v = \gamma$$

Que son desigualdades transformadas en igualdades!

Calculo microscopico de los exponentes criticos

Sea una funcion de particion

$$Z(\mathbf{K}, N) = \sum_{\{s_i\}} \exp(-H\{\mathbf{K}, \{s_i\}, N\})$$

Sea el Hamiltoniano general

$$H\{\mathbf{K}, \{s_i\}, N\} = K_0 + K_1 \sum_i s_i + K_2 \sum_{i,j}^{(1)} s_i s_j + K_3 \sum_{i,j}^{(2)} s_i s_j + \\ + K_4 \sum_{i,j,k}^{(2)} s_i s_j s_k + \dots$$

$\sum_{i,j}^{(1)} \rightarrow$ vecinos inmediatos

$\sum_{i,j}^{(2)} \rightarrow$ vecinos siguientes

K.Wilson Phys. Rev. B 4(1971)3174
Rev. Mod. Phys. 47(1975)773

**A Modern Course in
Statistical Physics**

2nd Edition

L. E. REICHL

En la formulacion anterior el caso de ising corresponde a
 $K_1 = -\beta B ; K_2 = -\beta J ; (K_3, K_4, \dots = 0)$

Ahora se definen los bloques.

Se suma sobre los spines interiores al bloque

$$Z(\mathbf{K}, N) = \sum_{\{S_I, s_I\}} \exp(-H\{\mathbf{K}, \{S_I, s_I\}, N\})$$

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{K}, N) &= \sum_{\{S_I\}} \exp(-H\{\mathbf{K}_L, \{S_I\}, NL^{-d}\}) \\ &= Z(\mathbf{K}_L, NL^{-d}) \end{aligned}$$

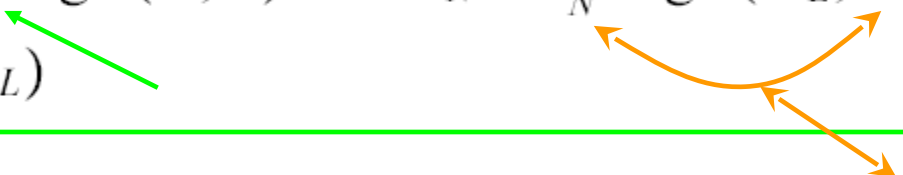
· { Luego de sumar sobre los spines interiores

nuevo $\mathbf{K}$

numero de "supernodos"

De esta forma la funcion de particion conserva su forma,

entonces (densidad de energia libre por nodo)

$$g(\mathbf{K}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z(\mathbf{K}, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z(\mathbf{K}_L, NL^{-d}) = \\ = L^{-d} g(\mathbf{K}_L)$$


Mult. por $[L^{-d} / L^{-d}]$ por escaleo

De aqui se ve que el vector de acoplamiento a pasado de $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}_L$. Escribimos entonces esta transformacion como

$$\mathbf{K}_L = T(\mathbf{K}) \text{ (en general no lineal)}$$

(la forma de la energia puede variar! Pero mantendremos la forma de Z)

El resultado de la transformacion es un conjunto de "super spines" que puede ser transformado nuevamente tantas



veces como se quiera (en ppo.)

$$\mathbf{K}_{nL} = T(\mathbf{K}_{(n-1)L})$$

Si estamos en el punto critico la distancia de correlacion es infinita y el sistema es "transparente" ante la realizacion de la transformacion

Si el sistema no esta en el punto critico ante cada transformacion el rango de la correlacion se reduce y el sistema se comporta como si se alejase del punto critico.

Sea ξ la distancia de correlacion

Red original $\Rightarrow$ espaciamento a

Red transformada $\Rightarrow$ espaciamento La

$$\xi = \xi_L(La) = \xi_1 a \Rightarrow$$

$$\xi_L = \xi_1 / L$$

Como $\xi_L < \xi_1$ nos alejamos del puento critico del sistema original

Luego estaremos a una nueva temperatura efectiva

De los anterior se ve que en el punto critico el sistema no es alterado por la transformacion $\rightarrow$ punto fijo

$$\mathbf{K}^* = T(\mathbf{K}^*)$$

Por efecto de la aplicacion de la transformacion el vector $\mathbf{K}$ se mueve en el espacio de los parametros.

Sea $\mathbf{K} = \mathbf{K}(K_1, K_2) \Rightarrow \mathbf{K}_L = T(\mathbf{K})$ y $\mathbf{K}^*$ corresponde a (K_1^*, K_2^*)

La cuestion es ver como se mueve $\mathbf{K}$ en la vecindad del punto critico.

Linealizamos $\mathbf{K}_{nL} = T(\mathbf{K}_{(n-1)L})$ en la vecindad de $\mathbf{K}^*$

Sea $\delta\mathbf{K}_L = (\mathbf{K}_L - \mathbf{K}^*)$ y $\delta\mathbf{K} = (\mathbf{K} - \mathbf{K}^*)$

$\delta\mathbf{K}_L = \mathbb{C}\delta\mathbf{K}$ donde

$$\delta \mathbf{K}_L = \mathbb{C} \mathbf{K}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{1L}}{\partial K_1} & \frac{\partial K_{1L}}{\partial K_2} \\ \frac{\partial K_{2L}}{\partial K_1} & \frac{\partial K_{2L}}{\partial K_2} \end{pmatrix}_{K_{1L}=K_1^*, K_{2L}=K_2^*}$$

$\mathbb{C}$ en general es no simétrica

Sean los autovalores $\delta \mathbf{u}_L = \Lambda \delta \mathbf{u}$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

La matriz de autovalores

y

$$\delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix}$$

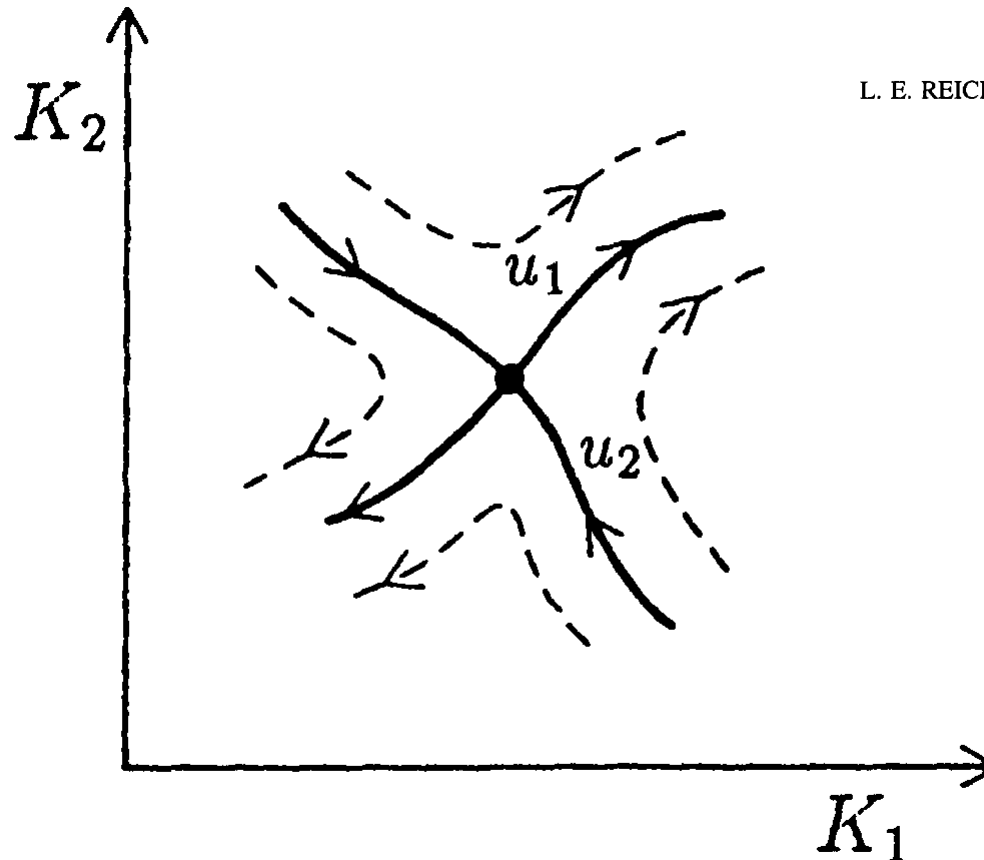


Fig. 8.2. A hyperbolic fixed point with its eigencurves and the flow of points in the neighborhood of the fixed point.

$$\delta \mathbf{u}_L = \overline{\overline{\Lambda}} \delta \mathbf{u}$$

Entonces por aplicacion sucesiva de la transformacion se obtiene

$$\delta u_{nL,1} = \lambda_1^n \delta u_1, \delta u_{nL,2} = \lambda_2^n \delta u_2$$

Entonces si $\lambda_i > 1$ se aleja y si $\lambda_i < 1$ se acerca.

Los $\lambda_i > 1$ se llaman relevantes y se asocian a ϵ o B pues regulan la cercania al punto critico. (por ser los que marcan la invarianza)

Como $g(\mathbf{K}) = L^{-d} g(\mathbf{K}_L)$

Entonces escribimos la parte singular del potencial termodinamico como

$$g_s(\delta u_1, \delta u_2, \dots) = L^{-d} g_s(\lambda_1 \delta u_1, \lambda_2 \delta u_2, \dots)$$

Con lo que nos encontramos nuevamente con la formulación de Widom

Si $\lambda_i > 1$ usando Widom para Ising

$$g(\epsilon, B) = \frac{1}{\lambda} g(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B)$$

Función homogénea

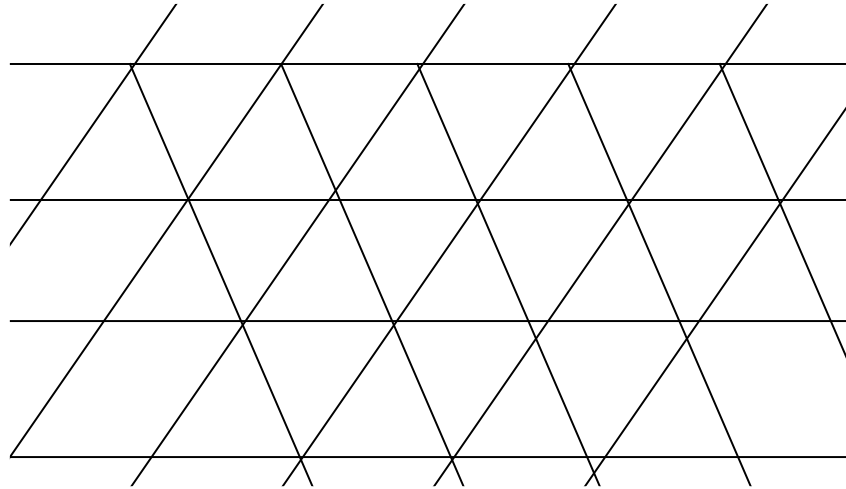
con $\lambda = L^d$

$$\begin{aligned}\lambda_1 = L^{dp} &\Rightarrow p = \frac{\log \lambda_1}{d \log L} \\ \lambda_2 = L^{dq} &\Rightarrow q = \frac{\log \lambda_2}{d \log L}\end{aligned}$$

identificamos

$$\begin{aligned}\delta u_1 &\leftrightarrow \epsilon \\ \delta u_2 &\leftrightarrow B\end{aligned}$$

Sea una red bidimensional triangular



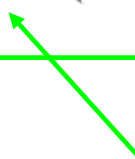
La red triangular

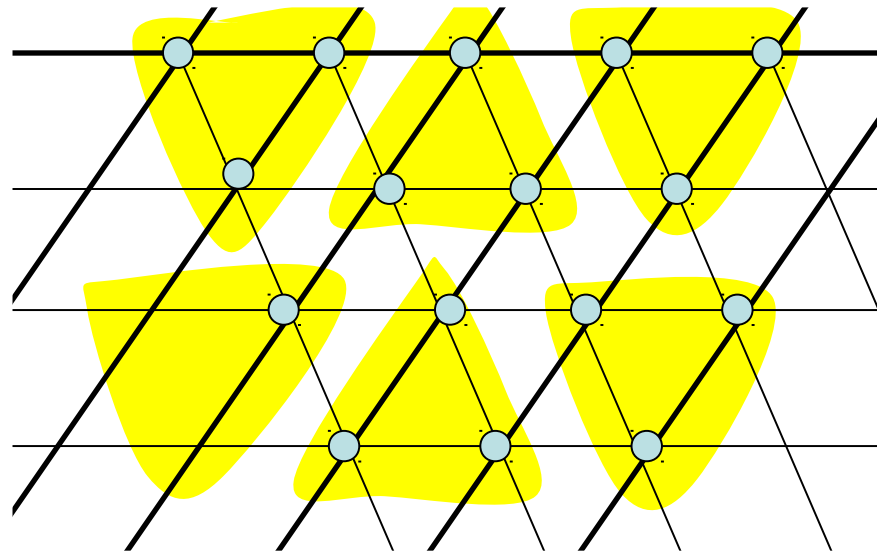
Hamiltoniano original

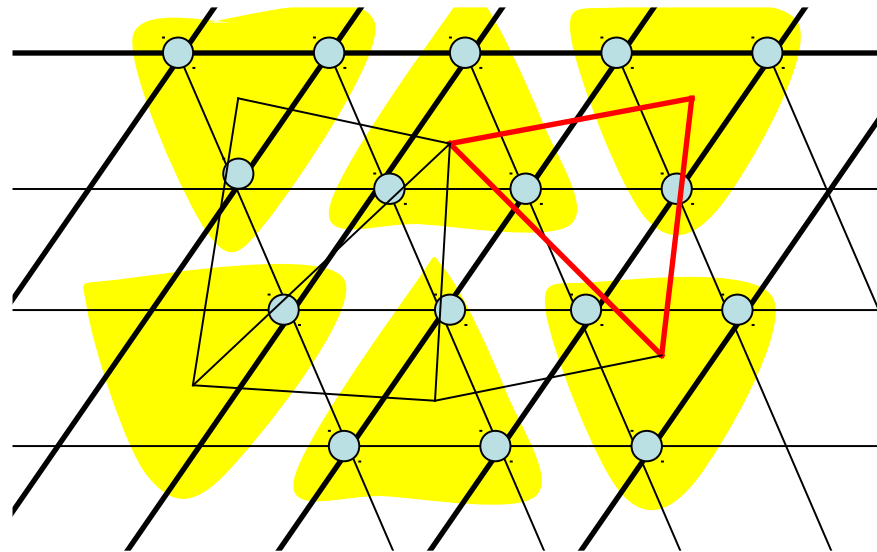
$$H = K \sum s_i s_j - B \sum s_i$$

Definimos los dominios triangulares con 3 spines
(aproximacion de celda pequeña)

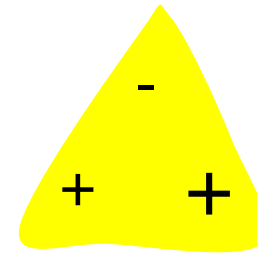
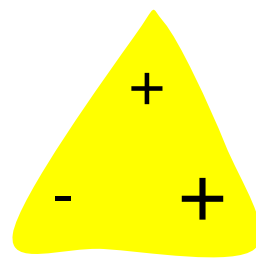
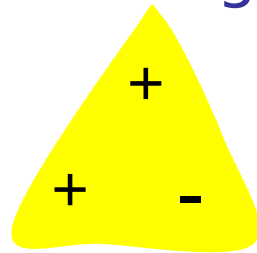
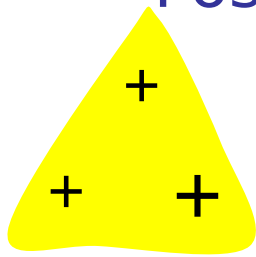
Para cada dominio definimos para cada celda

$$S_I = \text{signo}(s_1 + s_2 + s_3)$$


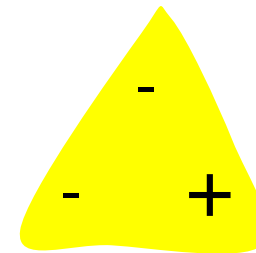
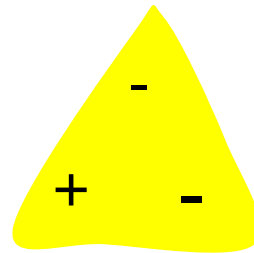
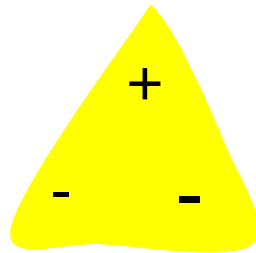
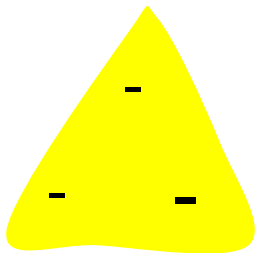




Posibles configuraciones de las celdas



} +
.



} -
.

$$\Rightarrow S_I = \pm 1$$

Sea ademàs para cada celda

$$\sigma_I = |s_1 + s_2 + s_3|$$

$$\Rightarrow \sigma_I = 3, 1$$

El objeto de estudio es $Z \Rightarrow$

$$Z(K, N) = \sum_{\{S_I\}\{\sigma_I\}} \exp[-H(K, \{S_I\}\{\sigma_I\}, N)]$$

$$Z(K, N) = \sum_{\{S_I\}} \exp[-H(K_1, \{S_I\}, N')] = Z(K_L, N')$$

El trabajo sobre los bloques se refleja en los parametros del H

$$\text{Sea } H(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = H_0(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) + V(K, \{S_I\} \{\sigma_I\})$$

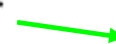
$$H_0(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = -K \sum_I \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} s_i s_j$$

O sea que involucra indices "internos" de cada celda

$$V(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = -K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} s_i s_j - B \sum_I \sum_{i \in I} s_i$$

$$V(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = V_1(s_i, s_j) + V_2(s_i)$$

O sea que involucra terminos de interaccion entre diferentes celdas y terminos de interaccion con el campo B .

Para sistemas de interaccion de rango corto V_1 es un termino de superficie. El "peso" de este termino sera mayor 

(mas pequeñas)

cuanto menor sean las celdas consideradas. A este termino estaran asociadas K_L y B_L .

Sea un operador A que depende de los spines y por lo tanto $A = A(\{S_I, \sigma_I\})$

Entonces

$$\langle A \{S_I\} \rangle = \sum_{\{\sigma_L\}} A(\{S_I, \sigma_I\}) \frac{\exp[-H_0(K, \{S_I\} \{ \sigma_I \})]}{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0(K, \{S_I\} \{ \sigma_I \})]}$$

Es un promedio sobre las coordenadas internas con el peso del Hamiltoniano "interno".

Sea ahora

(Sumamos sobre los spines interiores)

$$\begin{aligned}\exp[-H(K_L, \{S_I\})] &= \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H(K_L, \{S_I \sigma_L\})] = \\ &= \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \exp[-V] = \\ &= \frac{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0]}{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0]} \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \exp[-V] =\end{aligned}$$

Entonces tenemos para $\exp[-V]$ un valor medio

$$\frac{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \exp[-V]}{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0]} \Rightarrow$$

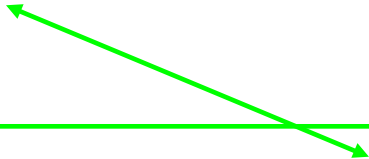
$$\begin{aligned}\langle \exp(V) \rangle_0 &= \langle 1 + V + V^2/2 + \dots \rangle_0 \\ &= \langle 1 \rangle + \langle V \rangle_0 + \langle V^2/2 \rangle_0 + \dots \\ &\approx 1 + x ; x = \langle V \rangle_0 + \langle V^2/2 \rangle_0 + \dots\end{aligned}$$

V es una perturbación (es la parte de superficie)

luego

$$\begin{aligned}\log\langle\exp(V)\rangle_0 &= \log(1+x) \approx x - x^2/2 = \langle V \rangle + \frac{1}{2}\langle V \rangle^2 - \frac{1}{2}\langle V \rangle^2 \dots \\ &= \left[\langle V \rangle_0 + \frac{1}{2}[V - \langle V \rangle]^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

luego


$$\exp[-H(K_L, \{S_I\})] = \left[\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] \cdot \exp\langle V \rangle_0 \cdot \exp[V - \langle V \rangle]$$

A orden mas bajo

$$\exp[-H(K_L, \{S_I\})] = \left[\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] \cdot \exp\langle V \rangle_0$$

luego

$$H(K_L, \{S_I\}) = \log \left[\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] + \langle V \rangle_0$$

○ Para el primer termino (para bloques independientes)

$$\text{a) } \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0(K_L, \{S_I \sigma_L\})] = [Z_0(K)]^M$$

$$\text{b) } Z_0(K) = \sum_{\sigma} \exp[K(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3)]$$

$$\sigma = 3, 1 \Rightarrow$$

si $\sigma = 3 \Rightarrow 3K$ una unica configuracion

si $\sigma = 1 \Rightarrow -K$ y hay 3 configuraciones

Entonces

De un bloque

(hacer la cuenta)

$$Z_0(K) = \exp(3K) + 3 \exp(-K)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \log \left[\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] &= M \log(Z_0(K)) \\ &= M \log[\exp(3K) + 3 \exp(-K)] \end{aligned}$$

○ Sean ahora los terminos de interaccion

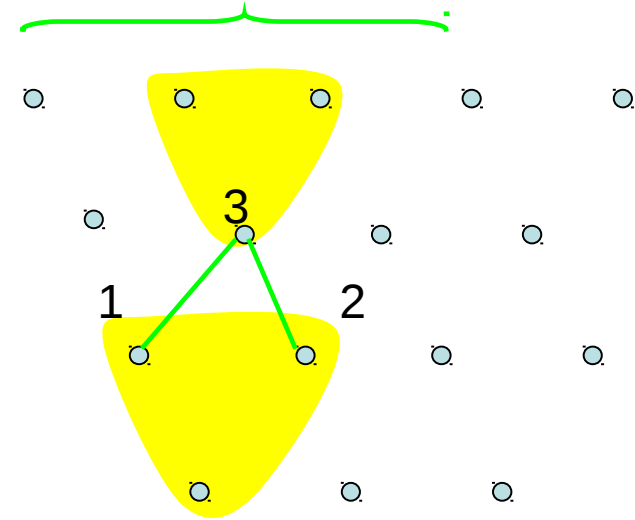
$$V_1(s_i, s_j) + V_2(s_i)$$

Para el primer sumando, un termino tipico de interaccion entre spines de dos bloques triangulares contiguos es

$$V_{ij} = -K(s_1^I s_3^J + s_2^I s_3^J) \Rightarrow$$

$$\langle V_{ij} \rangle = \langle -K(s_1^I s_3^J + s_2^I s_3^J) \rangle = -2K \langle s_1^I \rangle \langle s_3^J \rangle$$

pues estan en dos celdas distintas.



Sea uno de los valores medios $\langle s_3^J \rangle$

$$\begin{aligned} \langle s_3^J \rangle &= \frac{\sum_{\sigma_L} s_3^J \exp(K(s_1^I s_2^J + \dots))}{Z_0(K)} = \frac{1}{Z_0(K)} S_I (\exp(3K) + \exp(-K)) = \\ &= S_I \frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \end{aligned}$$

(Expresamos el valor medio en funcion de S_I)

$Z_0(K)$

Luego $\langle V_{IJ} \rangle = -2K \left[\frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]^2 S_I S_J$

Sea ahora el termino que contiene $B (V_2)$

Este es directamente

$$B[\langle s_1 \rangle + \dots] = -3S_I B \left[\frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]$$

Finalmente (reuniendo los términos)

$$H(K_L, \{S_I\}) = \log \left[\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] + \langle V \rangle_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= M \log(Z_0(K)) + \\
&-2K \sum_{I \neq J} \left[\frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]^2 S_I S_J \\
&-3B \sum_I \left[\frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right] S_I
\end{aligned}$$

De donde tenemos

$$H(K_L, B_L, \{S_I\}) = -K_L \sum_{I \neq J} S_I S_J - B_L \sum_I S_I$$

con

$$\begin{aligned}
K_L &= 2K \left[\frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]^2 \\
B_L &= 3B \left[\frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]
\end{aligned}$$

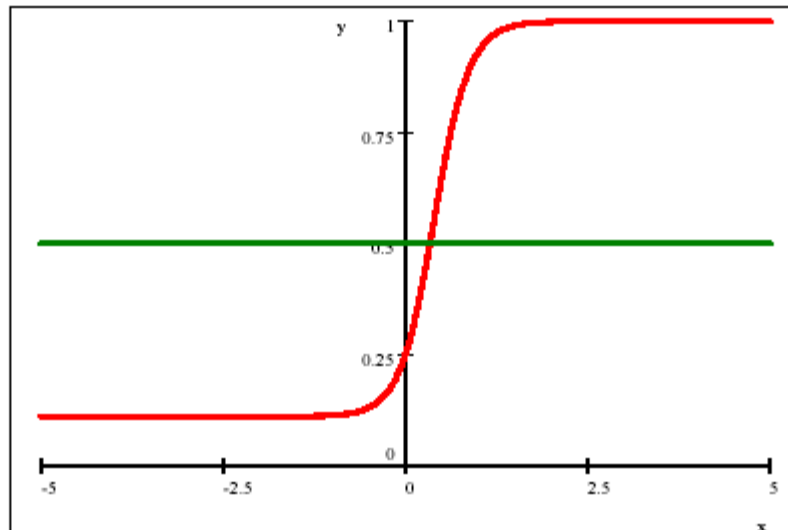
Para los puntos fijos

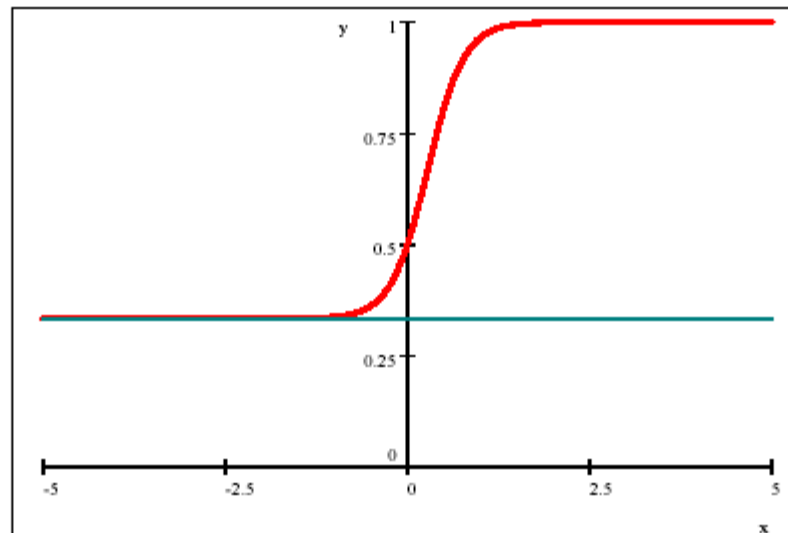
$(K_L=K \text{ y } B_L=B)$

$$\frac{1}{2} = \left[\frac{\exp(3K) + \exp(-K)}{\exp(3K) + 3\exp(-K)} \right]^2$$
$$\frac{1}{3} = \left[\frac{\exp(3K) + \exp(-K)}{\exp(3K) + 3\exp(-K)} \right]^2$$

$$\left[\frac{\exp(3K) + \exp(-K)}{\exp(3K) + 3\exp(-K)} \right]^2$$

En realidad hay 8 soluciones una sola real $K^* = 0.335614$,
 $B^* = 0$





converge a $-\infty$

En realidad hay 8 soluciones una sola real $K^* = 0.335614$,
 $B^* = 0$

y tambien $K^* = 0$, $B^* = 0$

El siguiente paso es linealizar las ecuaciones, resolver para los autovalores y autofunciones y se obtiene

Para $K^* = 0, B^* = 0$

$$K = \delta K ; B = \delta B$$

$$\delta K = 2\delta K \left[\frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3\exp(-K))} \right]_{K^*=0, B^*=0}^2 = 2\delta K \left[\frac{1+1}{1+3} \right]^2 = \underline{0.5\delta K}$$

del mismo modo

$$\underline{\delta B = 1.5\delta B}$$

Para el otro punto fijo $K^* = 0.335614$, $B^* = 0$

Sea $K = 0.3356 + \delta K$; $B = \delta B$

Se obtiene

$$\delta K = 1.623\delta K, \delta B = 2.121\delta B$$

Luego

$$\lambda_K = 1.623; \lambda_B = 2.121$$

De aqui se determinan los exponentes de Widom (a partir del escaleo de la g)

$$p = \log(\lambda_K)/(2 \log(3)) = 0.441$$

$$q = \log(\lambda_B)/(2 \log(3)) = 0.684$$

De donde se derivan los exponentes criticos
Sin embargo esta solucion de celda pequena...

	λ_k	λ_B	K_c
celda pequena	1.623	2.121	0.3356
siguientes vecinos	1.7590	2.8024	0.27416
exacto	1.73205	2.80092	0.27465

A Modern Course in Statistical Physics

2nd Edition

L. E. REICHL

The critical exponents are

$$\begin{aligned}\alpha &= 2 - \frac{1}{p} = -0.27, & \beta &= \frac{1-q}{p} = 0.72, \\ \gamma &= \frac{2q-1}{p} = 0.83, & \text{and } \delta &= \frac{q}{1-q} = 2.2\end{aligned}\quad (19)$$

The exact solution of this two-dimensional Ising model yields $(\lambda_K)_{\text{exact}} = 1.73$ and $(\lambda_B)_{\text{exact}} = 2.80$. Thus, we are close for λ_K but our calculation of λ_B is not very good. It is possible to carry the calculation to higher orders in $\langle V^n \rangle$. In so doing, more elements of the vector, $\mathbf{K}$, are introduced and better agreement with the exact results is obtained.

Aquí

Cortamos

!

