Física Teórica 3 − 2do cuatrimestre de 2016

Guía 8: *Modelo de Ising*

1. (Huang §14.6, Pathria §12.1) En una dimensión, el modelo de Ising puede ser resuelto en forma exacta. El método que se usa en este problema es el de la *matriz de transferencia*.

   (a) Considere una cadena cerrada de N espines. Muestre que la función de partición canónica es

   $$Q_N(b,K) = \sum_{\substack{s_1,\ldots,s_N\\ =\pm 1}} \exp\left[\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1})\right],$$

   donde $b = \beta\mu B$, $K = \beta J$, y $s_{N+1} = s_1$.

   (b) Muestre que $Q_N = \mathrm{Tr}\,(q^N)$, donde q es la matriz de 2×2 con elementos

   $$q_{ss'} = \exp\left[\frac{b}{2}(s+s') + K\,ss'\right] \qquad (s,s'=\pm 1).$$

   Ayuda: los exponentes en Q_N pueden ser reescritos de manera simétrica como

   $$\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1}) = \sum_{i=1}^{N}\left(b\,\frac{s_i+s_{i+1}}{2} + K\,s_is_{i+1}\right).$$

   (c) Muestre que la función de partición puede escribirse en la forma $Q_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$, donde $\lambda_\pm = e^K\left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}\right)$ son los autovalores de la matriz q.

   (d) Muestre que $\lim_{N\to\infty}\dfrac{\ln Q_N}{N} = \ln\lambda_+$.

   (e) Calcule la magnetización media $M = M(T,B)$ y muestre que no hay magnetización espontánea cuando $B\to 0^+$. Ayuda: la magnetización media por espín es

   $$\mu\bar{s} = \mu\,\frac{1}{N}\frac{\partial \ln Q_N}{\partial b}\bigg|_K.$$

2. (a) Use el método de la matriz de transferencia para resolver el problema de la cadena lineal con extremos abiertos: muestre primero que la función de partición es $Q'_N = \sum_{s,s'}\left[q^{N-1}\right]_{ss'}$ y luego que

   $$Q'_N = \left[1 + \frac{e^{-2K}}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}\right]\lambda_+^{N-1} + \left[1 - \frac{e^{-2K}}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}\right]\lambda_-^{N-1}.$$

   Ayuda: para calcular las potencias de q pueden usarse las mismas técnicas que en los problemas de Markov, con la simplificación adicional de que aquí la matriz es simétrica, de modo que sus autovectores por derecha e izquierda son los mismos.

   (b) Muestre que $\lim_{N\to\infty}\dfrac{\ln Q'_N}{N} = \ln\lambda_+$.

3. Para la cadena abierta sin campo, escriba la función de partición como una suma sobre todos los espines, sume explícitamente sobre el último espín y encuentre una relación de recurrencia para Q'_N en términos Q'_{N-1}. Resuelva la relación de recurrencia y verifique que coincide con el resultado del problema anterior.

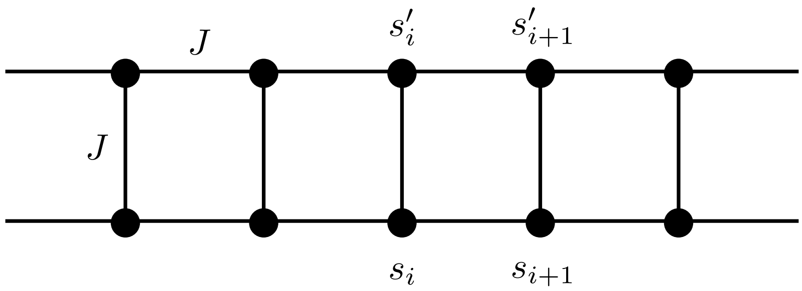
4. Use el método de la matriz de transferencia para resolver el problema de una doble cadena Ising cerrada y sin campo externo,

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \left(s_i s_{i+1} + s'_i s'_{i+1} \right) - J \sum_{i=1}^{N} s_i s'_i .$$

Muestre que para $N \gg 1$

$$\frac{1}{2N} \log Q_N \simeq \frac{1}{2} \log \left[2 \cosh K \left(\cosh 2K + \sqrt{1 + 4 \sinh^4 K} \right) \right] ,$$

donde $K = \beta J$. *Ayuda*: reescribir el término de interacción entre las cadenas de manera simétrica, $\sum_{i=1}^{N} s_i s'_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(s_i s'_i + s_{i+1} s'_{i+1} \right)$. La matriz de transferencia será de 4×4.



5. La aproximación de campo medio más simple para el modelo de Ising con condiciones periódicas consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para un solo espín, s, reemplazando la interacción con sus γ primeros vecinos por un término efectivo de la forma $E_1 = -J\gamma s \bar{s}$, donde $\bar{s}$ es el valor medio de cualquier espín. La interacción lineal con un campo magnético externo sigue siendo $-B\mu s$. Escriba la ecuación de autoconsistencia para el valor medio del espín y encuentre la temperatura crítica, T_c, por debajo de la cual hay magnetización espontánea. Para el caso $\gamma = 4$, compare esta solución con el valor exacto, $kT_c = -2J/\log(\sqrt{2} - 1)$.

6. En la aproximación de campo medio para un solo espín del problema anterior, halle los exponentes críticos de las siguientes magnitudes termodinámicas:

   (a) La magnetización media a campo nulo, que se comporta como $M(T, B = 0) \sim (T_c - T)^{\beta}$ para $T \longrightarrow T_c^-$.

   (b) La magnetización media en la temperatura crítica, que se comporta como $M(T_c, B) \sim B^{1/\delta}$ para $B \to 0$.

   (c) La susceptibilidad magnética $\chi_T(T, B = 0)$, la cual diverge como $(T_c - T)^{-\gamma}$ para $T \longrightarrow T_c^-$.

7. Una segunda aproximación de campo medio consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para dos espines vecinos, s_1 y s_2, conservando de manera exacta su interacción mutua, pero reemplazando los espines de los otros sitios vecinos por su valor medio $\bar{s}$.

(a) Hallar la ecuación de autoconsistencia para el valor de expectación $\bar{s}$ y con ella una expresión para T_c. Encontrar (numéricamente si es necesario) el valor de T_c para la red cuadrada y comparar con el resultado exacto y con el obtenido en la aproximación de campo medio para un solo espín.

(b) Hallar U y C_V para $T > T_c$.

8. (Dalvit, prob. 5.22) Considere una red cuadrada bidimensional formada por dos tipos de sitios A y B con momentos magnéticos μ_A y μ_B, respectivamente. El hamiltoniano es del tipo Ising, pero con interacción a primeros y segundos vecinos. Las constantes de acoplamiento son:

$$\begin{array}{ll} J_1 > 0 & \text{entre sitios vecinos de la red } A \\ J_1 > 0 & \text{entre sitios vecinos de la red } B \\ J_2 < 0 & \text{entre sitios vecinos } A \text{ y } B \end{array}$$

(a) Escriba el hamiltoniano en términos de s_i^A y s_i^B.

(b) En la aproximación de campo medio más simple, calcule el campo magnético efectivo que ven los espines de la red A. Ídem para la red B.

(c) Halle las ecuaciones para $\langle s_i^A \rangle$ y $\langle s_i^B \rangle$.

(d) Muestre que la susceptibilidad magnética a campo nulo obedece la ley de Curie

$$\chi(T, B \to 0) \sim \frac{1}{T - T_c}\,.$$