Física Teórica 3 – 1er. cuatrimestre de 2020

Guía 2: *Combinatoria, probabilidad, entropía*

I. Combinatoria

1. ¿De cuántas formas se pueden ordenar 5 personas en hilera para sacarse una foto? ¿De cuántas formas si A y B deben estar uno al lado del otro?

2. ¿Cuántas palabras de 3 letras (tengan o no sentido) se pueden formar con las letras a, b, c, d, e y f? ¿Y si no se pueden repetir letras?

3. Se llama anagrama de una palabra a toda permutación de sus letras, tenga o no sentido. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra MANZANA?

4. Para un torneo de ping pong se anotaron 6 personas. ¿Cuántos partidos se van a jugar si todos tienen que jugar entre sí?

5. ¿Cuántas maneras hay de amontonar N libros indistinguibles en M cajas distinguibles? ¿Cómo cambia el resultado si los libros son distinguibles e importa el orden en que se amontonan en cada caja? ¿Y si no importa ese orden?

6. Se arrojan N monedas. Determine el número de secuencias en las que

   (a) aparecen exactamente n caras;

   (b) no hay dos caras seguidas;

   (c) aparecen dos caras seguidas recién en los últimos dos tiros;

   (d) el número de caras es par.

II. Probabilidad

7. Se lanzan 10 dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres seis?

8. Un borracho está apoyado en una farola, y empieza a caminar dando pasos de igual longitud hacia la izquierda o hacia la derecha con igual probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que el hombre se encuentre otra vez junto a la farola después de dar N pasos, si N es par? ¿Y si es impar?

9. En un partido de truco que dura 15 manos entre 4 jugadores, encuentre la probabilidad de que a un dado jugador nunca le toque el ancho de espadas, y de que el ancho de espadas no salga en todo el partido.

10. La urna A tiene 7 bolas blancas y 3 negras, y la urna B, 5 blancas y 5 negras. Se extrae al azar una bola de A y se la coloca en B. A continuación se extrae al azar una bola de B. Encuentre la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean negras. Sugerencia: En vez de intentar enumerar todas las posibilidades, es mejor definir los sucesos A y B como ”bola extraída de A es negra” y ”bola extraída de B es negra”, respectivamente. Calcular $P(A)$, $P(A|B)$, y luego obtener $P(A \bigcap B)$.

11. Dos personas, A y B, juegan a lanzar alternativamente una moneda; gana el primero que obtiene cara. Si A hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. (*Sugerencia:* hay infinitos caminos que llevan a uno u otro ganador y la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando la probabilidad de cada camino independiente; trate de dar a esta proposición una forma rigurosa. Al margen de lo anterior, la simetría del problema permite llegar más rápidamente al resultado: note que luego del primer lanzamiento, si A no gana, a partir del segundo lanzamiento los roles de A y B se intercambian; formalice esto último y obtenga, en un par de pasos, el resultado.)

12. **El problema del cumpleaños.** En un aula hay n personas. Considerando, para simplificar, que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es $1/365$, y que las fechas de los cumpleaños de las n personas son estadísticamente independientes, calcule la probabilidad $p(n)$ de que al menos dos personas cumplan años el mismo día. ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que esta probabilidad sea mayor a $1/2$?

13. **Problème des rencontres.** Hay n objetos distintos, dispuestos en n lugares diferentes según un orden inicial. Tiene lugar una permutación al azar de estos objetos. Se pide encontrar la probabilidad $p(n)$ de que ningún objeto vuelva a su posición inicial, asumiendo que todas las permutaciones tienen igual probabilidad $1/n!$. Se trata, en definitiva, de contar el número de permutaciones de n elementos que no dejan ningún elemento en su posición original. Resulta complicado contar directamente estos casos. Sin embargo, al igual que en muchos problemas de combinatoria, es más sencillo encontrar una relación de recurrencia y trabajar a partir de ahí.

    (a) Demuestre que $p(n)$ satisface la siguiente relación de recurrencia,

    $$np(n) - (n-1)p(n-1) = p(n-2).$$

    (b) A partir de lo anterior, encuentre $p(n)$ y muestre que $p(n) \to e^{-1}$ cuando $n \to \infty$. *Sugerencia:* defina la función generatriz $F(x) = \sum_n x^n p(n)$ y transforme la relación de recurrencia para p en una ecuación diferencial para F. La condición inicial puede fijarse calculando directamente un caso sencillo, por ejemplo $p(2)$.

14. Un complicado problema de combinatoria y probabilidad, que involucra a cuatro pistoleros, y en donde hay que averiguar cuál es la mejor estrategia que debe seguir cada uno si quiere mantenerse con vida, es omitido en esta guía. No así un problema que deriva de aquél, y que traducimos en esta forma:

    El problema de los pistoleros daneses. El último pistolero con vida decide, como es natural, celebrar su triunfo con una fiesta. Ahora tiene tantos amigos (pues esto suele acontecerle a los ganadores) que, dejando sólo lo más pasable, decide reunir a 111 comensales. Tal como ha escuchado que es de uso en las recepciones de los embajadores de los mejores países del mundo, frente a cada silla dispone una tarjeta con el nombre del invitado correspondiente. Desafortunadamente, hombre de poco roce, el primer invitado en llegar no nota este detalle y se sienta en un lugar al azar (es decir, puede incluso ocupar el lugar correcto). Resignados y corteses (hijos de Odín al fin y al cabo), los otros invitados se sientan en sus lugares correctos, siempre y cuando los encuentren disponibles; caso contrario toman un lugar desocupado al azar. La pregunta, entonces, es la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que el último invitado en llegar se siente en el lugar que le fue originalmente asignado?

Sugerencia: Los casos simples de 2, 3, 4 invitados pueden analizarse directamente y servir como base al problema de los 111 invitados.

15. **Variables aleatorias.** Calcule la media y la varianza de las variables aleatorias descriptas por las siguientes distribuciones de probabilidad:

    (a) Uniforme discreta: $P(n) = 1/N$ con $n = 1, \ldots, N$.

    (b) Binomial: $P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ con $n = 1, \ldots, N$ y $p \leq 1$.

    (c) Uniforme continua: $f(x) = 1/L$ con $x \in [0, L]$.

    (d) Exponencial: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ con $x, \lambda \geq 0$.

    (e) Gaussiana: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

III. Entropía

16. La entropía de una distribución de probabilidad p se define como

$$S(p) = -\sum_{r=1}^{M} p_r \log p_r,$$

donde p_r es la probabilidad del resultado r y M es el número de resultados posibles. La entropía se interpreta como una medida del grado de incertidumbre asociado a p. Confirme esta interpretación mostrando que S es mínima cuando un resultado ocurre con probabilidad 1, y máxima cuando todos los resultados ocurren con igual probabilidad, $p_r = 1/M$.

Sugerencia: para lo segundo, conviene empezar graficando $x \log x$ en el intervalo $[0, 1]$ y usar la llamada desigualdad de Jensen, de teoría de funciones convexas: si Φ es continua y convexa, entonces

$$\Phi\left(\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} a_r\right) \leq \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} \Phi(a_r).$$

17. Calcule la entropía para las distribuciones de probabilidad del problema 15. Note que para las variables continuas debe reemplazar la sumatoria sobre estados r en la definición de entropía por una integral sobre el rango de la variable. En ese caso se la llama entropía diferencial.

18. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que maximiza la entropía si se conoce

    (a) $\langle x \rangle = \mu$;

    (b) $\langle x \rangle = \mu$, $\langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2$.

19. Se observa que en un dado cargado el número 6 sale el doble de veces que el número 1. No se observa nada raro para las otras caras. ¿Cuáles son las probabilidades p_m ($1 \leq m \leq 6$) que maximizan la entropía?