**Física Teórica 3 – 1er cuatrimestre de 2020**

**Guía 7:** *Teoría de Landau y grupo de renormalización*

## I. Teoría de Landau

1. La energía libre de Landau para un ferromagneto en ausencia de campo magnético externo es

$$f(m,T) = a(T)m^2 + b(T)m^4.$$

   (a) Es de esperar que $m$ sea nula para $T > T_c$ y finita para $T < T_c$. ¿Qué condiciones deben cumplir $a(T)$ y $b(T)$ para que ese comportamiento tenga lugar?

   (b) Los exponentes críticos $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ y $\delta$ se definen a partir del comportamiento de la magnetización, el calor específico y la susceptibilidad cerca del punto crítico por las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_V &\sim |T - T_c|^{-\alpha} && (h = 0) \\ m &\sim (T_c - T)^{\beta} && (h = 0,\ T < T_c) \\ \chi &\sim |T - T_c|^{-\gamma} && (h = 0) \\ m &\sim h^{1/\delta} && (T = T_c), \end{aligned}$$

   Teniendo en cuenta que $a(T) \simeq a_0(T - T_c)$ y $b(T) \simeq b_0$, donde $a_0$ y $b_0$ son constantes positivas, calcule los exponentes críticos para este modelo.

2. Considere un sistema cuya energía libre de Landau es

$$f(m,T) = am^2 + bm^4 + cm^6,$$

   donde $a$ y $b$ son funciones de la temperatura y $c$ es una constante positiva. Minimizando $f$, encuentre la magnetización $m$ en función de los parámetros $a$ y $b$. En particular, muestre lo siguiente.

   (a) En el caso $b > 0$, $m$ se anula para $a > 0$ y es distinta de cero para $a < 0$. La línea $b > 0$, $a = 0$ marca una transición de fase. ¿De qué orden es esta transición?

   (b) En el caso $b < 0$, $m$ se anula para $a > b^2/(4c)$ y es distinta de cero para $a < b^2/(4c)$. La línea $b < 0$, $a = b^2/(4c)$ marca una transición de fase. De qué orden es?

   Grafique en el plano $ab$ las líneas donde ocurren transiciones de fase.

3. La teoría de Ginzburg-Landau se usa para estudiar fluctuaciones de un sistema cerca de un punto crítico, y consiste en permitir que el parámetro de orden dependa de la posición. Para un ferromagneto, la energía libre de Ginzburg-Landau es

$$F[m(\mathbf{r});T] = \int d^3r[am^2 + bm^4 + c(\nabla m)^2],$$

   donde $a$, $b$ y $c$ son funciones de la temperatura con $b, c > 0$.

   (a) Pruebe que los extremos de esta energía libre están dados por la ecuación

$$c\nabla^2 m = am + 2bm^3.$$

(b) Suponiendo $a < 0$ y que la magnetización sólo depende de la coordenada $x$, encuentre la solución que cumple $m(x) \to \pm\sqrt{-a/(2b)}$ cuando $x \to \pm\infty$. Discuta cualitativamente esta solución.

**II. Grupo de renormalización**

4. En el modelo de Ising en una dimensión, en lugar de sumar sobre los spines pares, se pueden definir otras formas de decimar el sistema. Por ejemplo, una posible forma de decimar es sumar sobre dos de cada tres spines. Es decir, los spines cuyo índice es un múltiplo de 3 ($s_3, s_6, s_9, \dots$) permanecen en la red, y los demás ($s_1, s_2, s_4, s_5, \dots$) se suman. Muestre que para esta elección la transformación del grupo de renormalización también puede ser calculada en forma cerrada, y encuentre los puntos fijos.

5. De hecho, es fácil estudiar decimaciones arbitrarias con la ayuda de la matriz de transferencia. Considere la cadena de Ising unidimensional, cerrada, sin campo magnético, formada por $N$ spines y con constante de acoplo adimensional $\beta J = K$.

   (a) Si $l$ es un divisor de $N$, pruebe que los spines ubicados en las posiciones $l, 2l, \dots, N$ (es decir, las posiciones múltiplos de $l$) se comportan como una nueva cadena de Ising con constante de acoplo adimensional $K'$, con
   $$\tanh K' = (\tanh K)^l.$$
   *Ayuda:* use la matriz de transferencia. Va a tener que calcular sus autovalores.

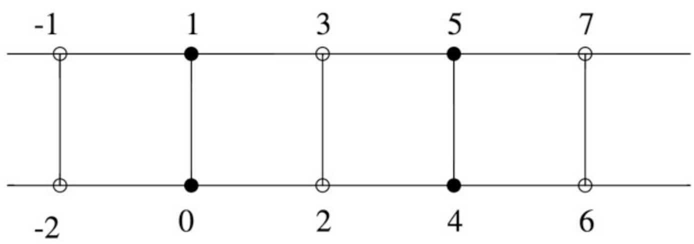
   (b) Encuentre los puntos fijos y estudie su estabilidad.

6. Considere el modelo de Potts en una dimensión, cuyo hamiltoniano es
   $$H(s_1, \dots, s_N) = -J \sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i s_{i+1}},$$
   donde $J$ es una constante positiva, $\delta_{kl}$ es la delta de Kronecker y, para cada $i = 1, \dots, N$, $s_i$ puede tomar $q \geq 2$ valores distintos.

   (a) Obtenga las ecuaciones del grupo de renormalización correspondientes a decimar el sistema sumando sobre todos los sitios pares (*ayuda:* tenga en cuenta que $e^{\alpha\delta_{kl}} = 1 + \delta_{kl}(e^{\alpha} - 1)$).

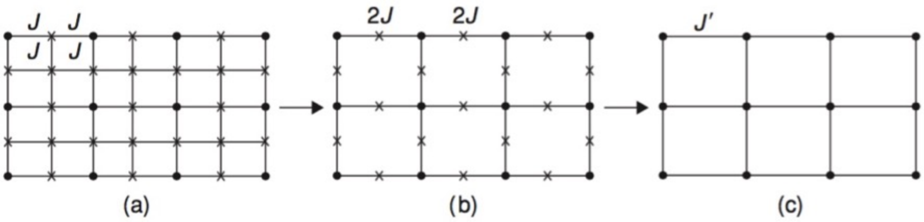
   (b) Encuentre los puntos fijos y estudie su estabilidad. Discuta sus resultados.

7. Considere el modelo de Ising en escalera (ver figura).




   Una forma posible de decimar es sumar sobre los spines con círculos blancos, dejando los spines con círculos negros. Calcule la transformación del grupo de renormalización y muestre que aparecen interacciones nuevas además de las de primeros vecinos.

8. Una forma aproximada de implementar una transformación del grupo de renormalización en una red cuadrada es la llamada transformación de Migdal-Kadanoff, que se muestra en la figura.




La transformación consta de dos pasos. Primero, la mitad de los enlaces en la red simplemente se eliminan, de manera que la escala de longitud de la red se multiplica por 2; para compensar eso, la constante de acoplo de los enlaces restantes se cambia de $J$ a $2J$. Eso nos lleva de la figura (a) a la figura (b). Y segundo, los sitios marcados con cruces en la figura (b) se eliminan por medio de transformaciones de decimación unidimensionales, lo cual lleva a la figura (c) con constante de acoplo $J'$.

(a) Muestre que la relación de recurrencia para el modelo de Ising en una red cuadrada, de acuerdo con esta transformación, es

$$x' = 2x^2/(1+x^4),$$

donde $x = \exp(-2K)$ y $x' = \exp(-2K')$. Ignorando los puntos fijos triviales $x^* = 0$ y $x^* = 1$, muestre que un punto fijo no trivial de esta transformación es

$$x^* = \frac{1}{3}\left\{-1 + 2\sqrt{2}\sinh\left[\frac{1}{3}\sinh^{-1}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right)\right]\right\} \simeq 0.5437.$$

Compare con el valor real de $x_c$.

(b) Linealizando alrededor de este punto fijo no trivial, muestre que el autovalor $\lambda$ de esta transformación es

$$\lambda = 2(1-x^*)/x^* \simeq 1.6785$$

y por lo tanto el exponente $\nu \simeq 1.338$. Compare con el valor real de $\nu$.