

# Estadística cuántica para una densidad de estados dada por una ley de potencias

Facundo Rost

Física Teórica 3 - 1er cuatrimestre 2020

## Resumen

En la sección 1, vemos los pasos para resolver un problema de estadística cuántica, y notamos que suelen aparecer las densidades de estados dadas por leyes de potencias  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$ . En la sección 2, calculamos la función de partición y lo que se puede derivar de ella para sistemas con estadística cuántica con dicha densidad de estados, ya sean fermiones o bosones (sólo que las cuentas en ésta sección, a pesar de ser válidas para fermiones a cualquier temperatura, sólo serán válidas para bosones a temperaturas mayores a una cierta temperatura crítica  $T_C$ ), y vemos que pasa en el límite de temperaturas altas. En la sección 3, estudiamos el límite a temperaturas bajas de un sistema fermiónico. En la sección 4, estudiamos sistemas bosónicos a cualquier temperatura, en particular vemos que pasa a temperaturas bajas y porqué las cuentas de la sección 2 no son válidas. Hay dos apéndices con más temas, uno para entender la estadística de Boltzmann que surge del conteo correcto de Boltzmann, y otro para las propiedades de las integrales de Fermi y Bose que son muy importantes para el apunte. Y hay un último apéndice con ejercicios que sugerimos hacer para entender mejor los sistemas fermiónicos y bosónicos.

# Índice

<b>1. Densidades de estados dadas por leyes de potencias</b>	<b>3</b>
1.1. Gas ideal en $d$ dimensiones . . . . .	4
<b>2. Cálculo de la función de partición y sus derivaciones en estadística cuántica</b>	<b>5</b>
2.1. Aproximación a temperaturas altas . . . . .	10
2.2. Caso particular: Gas ideal en $d$ dimensiones . . . . .	11
<b>3. Sistema fermiónico a temperaturas bajas con densidad de estado <math>g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)}\epsilon^{\alpha-1}</math></b>	<b>12</b>
3.1. Temperatura cero . . . . .	16
3.2. Caso particular: Gas ideal en $d$ dimensiones . . . . .	17
<b>4. Sistema bosónico con densidad de estado <math>g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)}\epsilon^{\alpha-1}</math></b>	<b>18</b>
4.1. Caso particular: Gas ideal en $d$ dimensiones . . . . .	26
<b>A. Estadística de Boltzmann</b>	<b>28</b>
<b>B. Integrales de Fermi y Bose</b>	<b>30</b>
<b>C. Ejercicios para practicar</b>	<b>32</b>

# 1. Densidades de estados dadas por leyes de potencias

A la hora de resolver un problema de estadística cuántica, en general **hay dos partes muy diferentes**:

1. **Calcular la densidad de estados  $g(\epsilon)$  que corresponde al problema. En la expresión de  $g(\epsilon)$  está contenida toda la dinámica del problema**, es el único lugar en el que se utiliza el Hamiltoniano y los niveles de energía del problema.
2. A partir de la expresión obtenida de  $g(\epsilon)$ , **calcular el logaritmo de la función de partición  $\ln Z_{GC}$  y a partir de las derivadas de  $\ln Z_{GC}$  calcular  $U, N$  y a partir de éstas expresiones calcular  $\mu(T, V, N), C_V(T, V, N), p(T, V, N)$  etcétera** (calcular lo que pida el enunciado).

Para la primer parte, obtener la densidad de estados  $g(\epsilon)$ , hay que plantear que ésta es tal que:

$$\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) = \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) \quad (1)$$

donde  $g(\epsilon)$  es la densidad de estados (es decir  $g(\epsilon)d\epsilon$  es la cantidad de estados con energía entre  $\epsilon$  y  $\epsilon + d\epsilon$ ), y se integra sobre las posibles energías de los estados monoparticulares. Notar que  $g(\epsilon)$  tiene unidades de  $[\epsilon]^{-1}$ .

**El cálculo de la densidad de estados, excepto casos particulares, no depende de si se tiene un sistema de fermiones o bosones.** Como veremos en la sección 4, en caso de que se tengan bosones a temperaturas lo suficientemente bajas, hay que sumarle algo a la anterior expresión para ser válida. Y por otro lado, si se tienen niveles de energía discretos, tal vez haya que aproximar una integral por una sumatoria y tal vez sea necesario incluir términos de corrección a ésta aproximación con la fórmula de Euler-Maclaurin.

**En general, suele ocurrir que la densidad de estados del sistema posee la forma de una ley de potencias, y que el intervalo de posibles energías es  $[0, \infty)$ :**

$$g(\epsilon) = \tilde{D} \epsilon^{\tilde{\alpha}} = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1} \quad (2)$$

donde  $D > 0$  es una constante real positiva, y  $\alpha > 0$  es también una constante positiva. Se definieron dichas constantes por convención, de forma que el exponente de la energía sea  $\tilde{\alpha} = \alpha - 1 > -1$  y la constante que multiplique a  $\epsilon^{\tilde{\alpha}} = \epsilon^{\alpha-1}$  sea  $\tilde{D} = D/\Gamma(\alpha) > 0$  (como se puede ver en la anterior expresión). Como **la densidad de estados  $g(\epsilon)$  no depende de la temperatura ni de la fugacidad** (ya que no aparecen en la ecuación 1), entonces  $D, \alpha$  son

constantes respecto de  $\epsilon$  y también respecto de  $\beta, z$ . Notar que  $\alpha$  es adimensional y que  $D$  tiene unidades de  $[\epsilon]^{-\alpha}$ .

En general, suele ocurrir que la constante  $D$  depende del volumen  $V$  del sistema, más que nada si la energía no depende de la posición  $q$ , y al integrar  $\int d^d q = V$  se obtiene el volumen.

En la próxima subsección, vamos a ver un caso particular muy relevante en el que la densidad de estados posee ésta forma: Un gas ideal en  $d$  dimensiones. Otro caso particular muy relevante en el que la densidad de estados posee ésta forma, es el de un oscilador armónico en  $d$  dimensiones, y pueden intentar obtener ustedes la densidad de estados que corresponde al problema (aunque sea para  $d = 1$  o  $d = 3$ , o si quieren hacerlo en general adelante).

Como la densidad de estados suele tener esa forma en los ejercicios de las guías de estadística cuántica, lo que haremos a partir de la sección 2 es analizar la parte 2 del problema suponiendo que la densidad de estados del problema es 2.

## 1.1. Gas ideal en $d$ dimensiones

Sea un gas ideal en  $d$  dimensiones formado por partículas de spin  $s$  y masa  $m$ , con energía  $\epsilon = \|\vec{p}\|^2/(2m)$ :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) &= \sum_{s_z=-s}^s \int \frac{d^d q d^d p}{h^d} f\left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}\right) = \overbrace{\left(\sum_{s_z=-s}^s\right)}^{= g_s} \overbrace{\left(\int d^d q\right)}^{= V} \int \frac{d^d p}{h^d} f\left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}\right) \\
 &= \frac{g_s V}{h^d} \int d^d p f\left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}\right) = \frac{g_s V}{h^d} \int d^{d-1} \theta \int_0^\infty dp p^{d-1} f\left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}\right) = \frac{g_s V \Omega_{d-1}}{h^d} \int_0^\infty dp p^{d-2} f\left(\frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}\right) \\
 &= \frac{g_s V \Omega_{d-1}}{h^d} m \int_0^\infty d\epsilon (2m\epsilon)^{(d-2)/2} f(\epsilon) = \frac{g_s V}{h^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} m (2m)^{d/2-1} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{d/2-1} f(\epsilon) \\
 &= \frac{g_s V}{h^d} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} (2m)^{d/2} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{d/2-1} f(\epsilon) = \int_0^\infty d\epsilon \underbrace{\frac{g_s V}{\Gamma(d/2)} \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{d/2}}_{= g_{GI}(\epsilon)} \epsilon^{d/2-1} f(\epsilon)
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde en el primer renglón se integró y sumó en las variables  $q, s$  de las cuales la energía no depende; en el segundo renglón se realizó un cambio de variable a coordenadas esféricas  $(p, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})$ , y se integró en las  $d-1$  coordenadas angulares, obteniendo como resultado la superficie de una  $(d-1)$ -esfera  $S^{d-1}$  de radio 1:  $\int d^{d-1} \theta = \Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ <sup>1</sup>; en el tercer renglón se realizó el cambio de variable  $p \rightarrow \epsilon(p) = p^2/(2m)$  con  $p dp = m d\epsilon$ ; y en el cuarto renglón se identificó finalmente la densidad de estados  $g_{GI}(\epsilon)$  correspondiente al gas ideal en  $d$  dimensiones.

<sup>1</sup>Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere#Volume\\_and\\_surface\\_area](https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere#Volume_and_surface_area)

Luego:

$$g_{GI}(\epsilon) = \frac{g_s V}{\Gamma(d/2)} \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2} \epsilon^{d/2-1} = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1} \iff \begin{cases} \alpha_{GI} = d/2 \\ D_{GI} = g_s V \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2} \end{cases} \quad (4)$$

## 2. Cálculo de la función de partición y sus derivaciones en estadística cuántica

Consideremos **un sistema de fermiones (partículas con spin semi-impar  $s = k+1/2 = (2k+1)/2$  con  $k \in \mathbb{N}_0$ ) o de bosones (partículas con spin entero  $s \in \mathbb{N}_0$ )** que posee ciertos niveles  $\{i\}$  de energía  $\{\epsilon_i\}$ . Para hablar en general de ambos a la vez, diremos que es un **sistema con estadística cuántica. Podemos estudiarlo con el ensamble gran canónico si pensamos al sistema como un conjunto de celdas  $\{i\}$  que se corresponden con los posibles estados monoparticulares del sistema (que son distinguibles, pero no son idénticos** pues los estados pueden poseer energías distintas). Es decir, la celda/estado monoparticular  $i$  posee  $n_i$  partículas en dicho estado monoparticular, cada una de ellas con la energía  $\epsilon_i$  que corresponde a dicho estado. Luego, **dar un microestado del sistema consiste en especificar el número de partículas  $n_i$  que hay en cada estado monoparticular  $i$**  (es decir, el número de partículas  $n_i$  que poseen estado monoparticular  $i$ ).

**Al hacer ésto trataremos de forma correcta la indistinguibilidad de las partículas, y no de forma aproximada como se hacía al utilizar el conteo correcto de Boltzmann (ver apéndice A).**

Notemos que para éste ensamble se verifican las suposiciones 1 a 4 mencionadas en la sección 4.3 del apunte *más sobre ensambles* de la guía 3 <sup>2</sup> gracias a que el número de estados monoparticulares (celdas) es constante, a que dar un microestado del sistema consiste en especificar el número de partículas  $n_i$  que hay en cada estado monoparticular  $i$  (con su energía monoparticular  $\epsilon_i$ ), a que las magnitudes  $n_i, \epsilon_i$  de las celdas son no interactuantes, y que no hay vínculos entre las magnitudes  $n_i, \epsilon_i$  de las celdas/estados monoparticulares. Y luego notar que éste ensamble se corresponde con la última aplicación particular que aparece al final de la sección 4.3 de dicho apunte (excepto porque no se verifica la suposición 5, pues los estados monoparticulares/celdas no son idénticos). Entonces, considerando que los estados monoparticulares/celdas son distinguibles, **podemos factorizar a la función de partición en el ensamble gran canónico** utilizando la ecuación (61) de dicho apunte (válida si las suposiciones 1 a 4 son válidas, sin que

---

<sup>2</sup>Ver <http://materias.df.uba.ar/ft3a2020c1/files/2020/04/Maximizaci%C3%B3n-de-entrop%C3%ADa-e-introducci%C3%B3n-a-ensambles-version2.pdf>

los estados monoparticulares/celdas sean necesariamente idénticos):

$$Z_{GC} = \prod_{i \in \text{estados}} Z_i \iff \ln Z_{GC} = \sum_{i \in \text{estados}} \ln Z_i \quad (5)$$

Donde la productoria y la sumatoria es sobre todos los posibles estados monoparticulares (celdas) del sistema; y  $Z_i$  es la función de partición gran canónica del estado monoparticular  $i$ , dada por (considerando que sólo es necesario especificar el número de partículas  $n_i$  que poseen estado monoparticular  $i$  para dar el microestado del estado monoparticular/celda  $i$ ):

$$Z_i = \sum_n e^{-\beta(n\epsilon_i - \mu n)} = \sum_n \left( e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right)^n = \begin{cases} \sum_{n=0}^1 \left( e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right)^n = 1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} & \text{Fermiones} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} & \text{Bosones} \end{cases} \quad (6)$$

donde se diferenció el caso de que el sistema sea fermiónico (en cuyo caso no pueden haber dos o más partículas en un estado monoparticular  $i$  por el **principio de exclusión de Pauli**) o bosónico (en cuyo caso pueden haber cualquier número de partículas en un estado monoparticular  $i$ ).

En el caso de los bosones, para que no diverga la serie geométrica, es necesario pedir que  $e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} < 1 \iff \epsilon_i > \mu$  para todo estado monoparticular  $i$ , o equivalentemente que  $\mu < \epsilon_{\min}$  donde  $\epsilon_{\min}$  es la mínima energía de una partícula (un estado monoparticular con ésta energía mínima se dice que es fundamental). Se suele definir el cero de energía de forma tal que  $\epsilon_{\min} = 0 > \mu$ . Notar que  $\mu < 0 \iff z = e^{\beta\mu} < 1$ .

Podemos agrupar las anteriores dos ecuaciones en una si tomamos el logaritmo:

$$\ln Z_i = \pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i}) \quad (7)$$

donde si el sistema es fermiónico ambos signos son  $\pm = +$ ; y si el sistema es bosónico ambos signos son  $\pm = -$ .

La derivada de ésta ecuación respecto a  $z$  nos da **el número medio de partículas  $n_i$  en el estado monoparticular  $i$** :

$$n_i = z \frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial z} \Big|_{\beta} = \frac{ze^{-\beta\epsilon_i}}{1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i}} = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} \pm 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1} \equiv n_{\pm}(\epsilon_i) \quad (8)$$

Éstas funciones son las distribuciones de Fermi-Dirac y Bose-Einstein (si el signo es  $\pm = +$  o  $\pm = -$  respectivamente). Para fermiones  $n_i$  nunca es mayor a 1 (tiene sentido por el principio de exclusión de Pauli) y para bosones  $n_i$  puede tomar cualquier valor.

**El logaritmo de la función de partición  $\ln Z_{GC}$  tanto para un sistema de fermiones como para un sistema de bosones con una cierta densidad de estados  $g(\epsilon)$  es:**

$$\ln Z_{GC} = \sum_{i \in \text{estados}} \ln Z_i = \sum_{i \in \text{estados}} \pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon_{\text{estado } i}}) = \int d\epsilon g(\epsilon) \left( \pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon}) \right) \quad (9)$$

Donde la última igualdad de la anterior expresión (y todos los desarrollos que se deriven de ella en la presente sección) es válida para fermiones a cualquier temperatura, y para bosones a temperaturas lo suficientemente altas. En la sección 4 veremos que dicha ecuación no es válida para bosones a temperaturas bajas, y veremos qué hay que añadir a la anterior ecuación (y luego a todos los desarrollos que se deriven de ella) para que sea válida. Por ahora vamos a omitir el análisis de dicho caso por razones pedagógicas, y asumiremos que estamos estudiando fermiones a cualquier temperatura o bosones a temperaturas lo suficientemente altas, de forma que la anterior ecuación sea válida.

**Supongamos que la densidad de estados de nuestro problema (en la cual está contenida toda la dinámica) es de la forma:**

$$g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1} \quad (10)$$

donde  $D$  es una constante real positiva, y  $\alpha > 0$  es también una constante positiva. Se definieron dichas constantes por convención, de forma que el exponente de la energía sea  $\alpha-1$  y la constante que multiplique a  $\epsilon^{\alpha-1}$  sea  $D/\Gamma(\alpha)$  (como se puede ver en la anterior expresión). Como la densidad de estados  $g(\epsilon)$  no depende de la temperatura ni de la fugacidad, entonces  $D, \alpha$  son constantes respecto de  $\epsilon$  y también respecto de  $\beta, z$ .

**Si evaluamos en la anterior expresión en la densidad de estados**  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$ , considerando que el intervalo de posibles energías es  $[0, \infty)$ :

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= \pm \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \ln(1 \pm z e^{-\beta\epsilon}) = \pm \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \left( \overbrace{\frac{\epsilon^\alpha}{\alpha} \ln(1 \pm z e^{-\beta\epsilon})}^{=0} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^\alpha (-\beta)(\pm z e^{-\beta\epsilon})}{1 \pm z e^{-\beta\epsilon}} \right) \\ &= \frac{D}{\Gamma(\alpha)\alpha} \int_0^\infty d\epsilon \beta \frac{\epsilon^\alpha}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} \pm 1} = D \frac{1}{\beta^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \underbrace{\int_0^\infty dx \frac{x^\alpha}{z^{-1} e^x \pm 1}}_{\equiv I_{\alpha+1}^\pm(z)} = D \frac{1}{\beta^\alpha} I_{\alpha+1}^\pm(z) \end{aligned} \quad (11)$$

donde se integró por partes en el primer renglón:  $\int_a^b u'(\epsilon)v(\epsilon)d\epsilon = u(\epsilon)v(\epsilon)|_a^b - \int_a^b u(\epsilon)v'(\epsilon)d\epsilon$  con  $u(\epsilon) = \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha}$  (cuya derivada es  $u'(\epsilon) = \epsilon^{\alpha-1}$ ) y  $v(\epsilon) = \ln(1 \pm z e^{-\beta\epsilon})$  (cuya derivada es  $v'(\epsilon) = \frac{(-\beta)(\pm z e^{-\beta\epsilon})}{1 \pm z e^{-\beta\epsilon}}$ ), y se utilizó que el término de borde es nulo ya que  $u(\epsilon=0)v(\epsilon=0) = 0$  (porque  $u(\epsilon) = \epsilon^\alpha/\alpha$  se anula en  $\epsilon = 0$  gracias a que  $\alpha > 0$ ) y además  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} u(\epsilon)v(\epsilon) =$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha} \ln(1 \pm z e^{-\beta\epsilon}) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 \pm z e^{-\beta\epsilon})}{\alpha \epsilon^{-\alpha}} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{(-\beta)(\pm z e^{-\beta\epsilon})}{-\alpha^2 \epsilon^{-\alpha-1} (1 \pm z e^{-\beta\epsilon})} = \frac{\beta z}{\alpha^2} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon^{\alpha+1} e^{-\beta\epsilon} =$$

0, donde se aplicó L'hopital y se utilizó que una exponencial decae en el infinito mucho más rápido que una función polinómica (esto puede verse aplicando sucesivas veces L'hopital a  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon^{\alpha+1} e^{-\beta\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^{\alpha+1}}{e^{\beta\epsilon}}$  hasta que el grado del polinomio del numerador es menor o igual a cero); en el segundo renglón se tacharon los signos  $\pm$  del numerador, se pasó dividiendo al

denominador el término  $ze^{-\beta\epsilon}$ , se utilizó que la función Gamma verifica  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$  y se definieron las integrales  $I_\nu^\pm(z)$  de Fermi y Bose.

Ver apéndice B para ver las definiciones y propiedades de las integrales  $I_\nu^\pm(z)$ , que si el signo es  $\pm = +$  se denominan integrales de Fermi y se denotan  $f_\nu(z)$ , y si el signo es  $\pm = -$  se denominan integrales de Bose y se denotan  $g_\nu(z)$ .

Luego, **derivando**  $\ln Z_{GC}$ , **podemos calcular**:

$$\begin{aligned} U &= - \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial\beta} \right|_z = D\alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} I_{\alpha+1}^\pm(z) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \ln Z_{GC} = \alpha k_B T \ln Z_{GC} = \alpha (-\Omega) = \alpha pV \end{aligned} \quad (12)$$

Y también, denotando al número medio de partículas en el ensamble gran canónico como  $N$  y utilizando la propiedad  $z(I_{\alpha+1}^\pm)'(z) = I_\alpha^\pm(z)$  (ver apéndice B):

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta = D \frac{1}{\beta^\alpha} z(I_{\alpha+1}^\pm)'(z) = D \frac{1}{\beta^\alpha} I_\alpha^\pm(z) \quad (13)$$

Si dividiésemos éstas dos expresiones, obtendríamos:

$$\frac{U}{N} = \alpha \frac{1}{\beta} \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} \iff U = \alpha N k_B T \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} = \alpha pV \iff pV = N k_B T \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} \quad (14)$$

**Como la fugacidad  $z$  es una cantidad que depende de  $T, N, V$  (cuya dependencia  $z(T, N, V)$  está dada implícitamente por la ecuación 13), entonces hay que tener en cuenta ésto en las expresiones de la ecuación 14.**

Luego, si se quiere calcular el  $C_V = N c_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V, N}$  derivando la expresión  $U = \alpha N k_B T \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)}$  de la ecuación 14, es necesario tener en cuenta que  $\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V, N} \neq 0$ :

$$\begin{aligned} C_V = N c_V &= \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V, N} = \alpha N k_B \left. \frac{\partial}{\partial T} \left( T \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} \right) \right|_{V, N} = \alpha N k_B \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} + T \left. \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} \right) \right|_{V, N} \right) \\ &= \alpha N k_B \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} + T \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} \right) \left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V, N} \right) \\ &= \alpha N k_B \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} + T \frac{(I_{\alpha+1}^\pm)'(z) I_\alpha^\pm(z) - I_{\alpha+1}^\pm(z) (I_\alpha^\pm)'(z)}{(I_\alpha^\pm(z))^2} \left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V, N} \right) \\ &= \alpha N k_B \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} + T \frac{(I_\alpha^\pm(z))^2 - I_{\alpha+1}^\pm(z) I_{\alpha-1}^\pm(z)}{(I_\alpha^\pm(z))^2} z \left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V, N} \right) \\ &= \alpha N k_B \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} + T \left( 1 - \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z) I_{\alpha-1}^\pm(z)}{(I_\alpha^\pm(z))^2} \right) z \left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V, N} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

De hecho, podríamos calcular  $\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V, N} \neq 0$  derivando la ecuación 13 respecto de  $T$  a  $V, N$



constante:

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{\partial N}{\partial T} \right|_{V,N} = \left. \frac{\partial}{\partial T} (D(k_B T)^\alpha I_\alpha^\pm(z)) \right|_{V,N} = Dk_B^\alpha \left. \frac{\partial}{\partial T} (T^\alpha I_\alpha^\pm(z)) \right|_{V,N} \\
\implies 0 &= \left. \frac{\partial}{\partial T} (T^\alpha I_\alpha^\pm(z)) \right|_{V,N} = \alpha T^{\alpha-1} I_\alpha^\pm(z) + T^\alpha \underbrace{(I_\alpha^\pm)'(z)}_{=z I_{\alpha-1}^\pm(z)} \left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V,N}
\end{aligned} \tag{16}$$

Luego, despejando  $\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V,N}$  de lo anterior, podemos obtener:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V,N} = -\frac{\alpha}{zT} \frac{I_\alpha^\pm(z)}{I_{\alpha-1}^\pm(z)} \tag{17}$$

Reemplazando en la ecuación 15, obtenemos:

$$\begin{aligned}
C_V &= Nc_V = \alpha Nk_B \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} + \alpha \left( \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} - \frac{I_\alpha^\pm(z)}{I_{\alpha-1}^\pm(z)} \right) \right) \\
&= \alpha Nk_B \left( (\alpha+1) \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} - \alpha \frac{I_\alpha^\pm(z)}{I_{\alpha-1}^\pm(z)} \right) \\
\implies \frac{C_V}{Nk_B} &= \frac{c_V}{k_B} = \alpha \left( (\alpha+1) \frac{I_{\alpha+1}^\pm(z)}{I_\alpha^\pm(z)} - \alpha \frac{I_\alpha^\pm(z)}{I_{\alpha-1}^\pm(z)} \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

De ésta forma obtuvimos  $c_V$  escrito únicamente en función de  $z$ . A su vez,  $z$  se puede expresar implícitamente en función de  $T, N, V$  a partir de la ecuación 13.

En general, el volumen  $V$  del sistema está dentro de la constante  $D$ .

Si utilizamos la inversa  $(I_\alpha^\pm)^{-1}$  de la función  $I_\alpha^\pm$  (que existe ya que éstas funciones son crecientes), podemos despejar explícitamente de la ecuación 13 a la fugacidad  $z = z(T, N, V) = (I_\alpha^\pm)^{-1} \left( \frac{\beta^\alpha N}{D} \right)$ . A partir de éste resultado, reemplazando  $z = z(T, V, N)$  podríamos obtener las expresiones de  $U(T, N, V)$ , de  $C_V(T, V, N)$ , y también del potencial químico  $\mu = \frac{1}{\beta} \ln z = \frac{1}{\beta} \ln \left( (I_\alpha^\pm)^{-1} \left( \frac{\beta^\alpha N}{D} \right) \right)$ .

Podríamos calcular también la entropía del sistema, considerando que el multiplicador de Lagrange asociado a  $N$  en el gran canónico es  $\gamma = -\ln z \iff z = e^{-\gamma}$ :

$$S = k_B (\ln Z_{GC} + \beta U - \ln(z)N) = k_B (\ln Z_{GC} + \beta U - \ln(z)N) \tag{19}$$

donde, si se reemplaza  $\ln Z_{GC}$  y se escribe a  $\beta, z$  en función de  $U, N$  de acuerdo a las ecuaciones 12 y 13, se puede obtener la expresión de  $S(U, N, V)$ .

Pero, puesto que la función inversa  $(I_\alpha^\pm)^{-1}$  de la función  $I_\alpha^\pm$  no es agradable, no vamos a utilizarla en general. **Lo que haremos es ver que pasa en la aproximación de temperaturas altas y bajas (con  $N, V = \text{ctes}$ ), donde podemos aproximar las funciones  $I_\alpha^\pm(z)$ .** Como mencionamos previamente, el presente análisis es válido para los fermiones a cualquier temperatura y para los bosones a temperaturas lo suficientemente altas. Como ya comentamos, **para bosones a temperaturas bajas hay que hacer un análisis distinto que luego lo**

veremos en la sección 4. Entonces, podemos analizar a la vez el límite a temperaturas altas de los fermiones y bosones; en cambio el límite a temperaturas bajas lo tenemos que analizar por separado para fermiones y bosones.

## 2.1. Aproximación a temperaturas altas

Tomemos el límite  $T \rightarrow +\infty \iff \beta \rightarrow 0^+$  con  $N, V = \text{ctes}$ . Para lo cual, veamos como es la fugacidad  $z$  en éste límite, utilizando la ecuación 13:

$$T \rightarrow +\infty \iff \beta \rightarrow 0^+ \implies I_\alpha^\pm(z) = \frac{\beta^\alpha N}{D} \rightarrow 0^+ \iff z \rightarrow 0^+ \quad (20)$$

donde se utilizó que  $I_\nu^\pm(z)$  es creciente con  $z$  y que  $I_\nu^\pm(z) \sim z$  si  $z \rightarrow 0^+$ .

Por lo tanto, para tomar el anterior límite, es necesario tomar  $z \rightarrow 0^+$ . Y ésto implica que  $I_\nu^\pm(z) \simeq z$  en dicho límite, luego podemos reemplazar ésto último en las expresiones obtenidas:

$$\ln Z_{GC} = D \frac{1}{\beta^\alpha} I_{\alpha+1}^\pm(z) \simeq D \frac{1}{\beta^\alpha} z \quad (21)$$

Ésta función de partición coincide con la que se obtiene con la estadística de Boltzmann (ver apéndice A). Por lo tanto, todo lo que se va a obtener va a ser lo mismo que la estadística de Boltzmann. De hecho, notar que al aproximar a temperaturas altas, la función de partición no depende del signo  $\pm$  que determina si el sistema es fermiónico o bosónico. Es por ésto que **a temperaturas altas los sistemas fermiónicos y bosónicos se comportan de la misma forma: Como un sistema con estadística de Boltzmann (ver apéndice A).**

Luego, **derivando**  $\ln Z_{GC}$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned} U &= - \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial \beta} \right|_z \simeq D \alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} z \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \ln Z_{GC} = \alpha k_B T \ln Z_{GC} = \alpha (-\Omega) = \alpha pV \end{aligned} \quad (22)$$

Y también:

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta \simeq D \frac{1}{\beta^\alpha} z(z)' = D \frac{1}{\beta^\alpha} z = \ln Z_{GC} \quad (23)$$

Si dividiésemos éstas dos expresiones, obtendríamos:

$$\frac{U}{N} = \frac{\alpha}{\beta} \iff U = \alpha N k_B T = \alpha pV \iff pV = N k_B T \quad (24)$$

Notar que **deducimos la ecuación de estado del gas ideal**  $pV = N k_B T$ , y también que  $U \propto N k_B T$ .

Si quisieramos calcular el  $C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V,N}$ , tendríamos que derivar a  $U(T, V, N)$  escrito en función de  $T, V, N$ . Pero la expresión  $U = D \alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} z$  está en función de  $z$ , que a su vez es una

función de  $T, V, N$  que se puede despejar explícitamente de 96:  $z = \beta^\alpha N/D$ . Ésta expresión de  $z(T, N, V)$  se podría reemplazar en  $U = D\alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \beta^\alpha N/D = \alpha N/\beta = \alpha N k_B T$ , que es lo mismo que se obtuvo al dividir  $U/N$ .

Gracias a que en la expresión  $U = \alpha N k_B T$  no aparece  $z$ , ésta es en efecto la expresión  $U = U(T, N, V) = \alpha N k_B T$  de  $U$  escrita explícitamente en función de  $T, N, V$ . Luego, a partir de dicha expresión  $U(T, V, N)$  podemos derivarla y obtener la capacidad calorífica  $C_V$  y el calor específico  $c_V = C_V/N$  por partícula a volumen constante:

$$C_V = N c_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V, N} = N \alpha k_B \implies c_V = \alpha k_B \quad (25)$$

Vemos en definitiva que ésto es un gas ideal, pues verifica su ecuación de estado  $pV = N k_B T$ , y también que  $c_V = \alpha k_B = \text{cte}$  (ésto último es puesto que  $U \propto N k_B T$ ).

También podemos obtener a partir de  $e^{\beta\mu} = z = z(T, N, V) = \beta^\alpha N/D$ , deducir la expresión del potencial químico:

$$e^{\beta\mu} = z = z(T, N, V) = \frac{\beta^\alpha N}{D} \implies \mu = \mu(T, V, N) = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{\beta^\alpha N}{D} \right) = k_B T \ln \left( \frac{N}{D (k_B T)^\alpha} \right) \quad (26)$$

En general, el volumen  $V$  del sistema está dentro de la constante  $D$ .

## 2.2. Caso particular: Gas ideal en $d$ dimensiones

Recordando la densidad de estados del gas ideal en  $d$  dimensiones (ver ecuación 4) posee la forma de una ley de potencias:

$$g_{GI}(\epsilon) = \frac{g_s V}{\Gamma(d/2)} \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2} \epsilon^{d/2-1} = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1} \iff \begin{cases} \alpha_{GI} = d/2 \\ D_{GI} = g_s V \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2} \end{cases} \quad (27)$$

podemos calcular el logaritmo de la función de partición:

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= D_{GI} \frac{1}{\beta^{\alpha_{GI}}} I_{\alpha_{GI}+1}^\pm(z) = g_s V \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2} \frac{1}{\beta^{d/2}} I_{d/2+1}^\pm(z) \\ &= g_s V \left( \frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right)^{d/2} I_{d/2+1}^\pm(z) = g_s V \underbrace{\left( \sqrt{\frac{2\pi m k_B T}{h^2}} \right)^d}_{= \lambda^{-1}} I_{d/2+1}^\pm(z) \\ &= g_s \frac{V}{\lambda^d} I_{d/2+1}^\pm(z) \end{aligned} \quad (28)$$

donde se evaluó en la ecuación 11 la densidad de estados del gas ideal en  $d$  dimensiones con  $D_{GI}, \alpha_{GI}$ . Y se definió la **longitud de onda térmica del sistema**  $\lambda \equiv \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}} = \sqrt{\frac{h^2 \beta}{2\pi m}}$ , se denomina de esa forma pues es una cantidad con unidades de longitud que sólo depende de la temperatura  $\lambda = \lambda(T) = \lambda(\beta)$  (y de constantes que no son variables termodinámicas).

Luego, derivando  $\ln Z_{GC}$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned} U &= - \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial\beta} \right|_z = D_{GI} \alpha_{GI} \frac{1}{\beta^{\alpha_{GI}+1}} I_{\alpha_{GI}+1}^{\pm}(z) = g_s V \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2} \frac{d}{2} \frac{1}{\beta^{d/2+1}} I_{d/2+1}^{\pm}(z) \\ &= \frac{d/2}{\beta} g_s \frac{V}{\lambda^d} I_{d/2+1}^{\pm}(z) = \frac{d/2}{\beta} \ln Z_{GC} = \frac{d}{2} k_B T \ln Z_{GC} = \frac{d}{2} (-\Omega) = \frac{d}{2} pV \end{aligned} \quad (29)$$

Y también:

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_{\beta} = D_{GI} \frac{1}{\beta^{\alpha_{GI}}} z (I_{\alpha_{GI}+1}^{\pm})'(z) = D_{GI} \frac{1}{\beta^{\alpha_{GI}}} I_{\alpha_{GI}}^{\pm}(z) = g_s \frac{V}{\lambda^d} I_{d/2}^{\pm}(z) \quad (30)$$

Si dividiésemos éstas dos expresiones, obtendríamos:

$$\frac{U}{N} = \frac{d/2}{\beta} \frac{I_{\alpha+1}^{\pm}(z)}{I_{\alpha}^{\pm}(z)} \iff U = \frac{d}{2} N k_B T \frac{I_{\alpha+1}^{\pm}(z)}{I_{\alpha}^{\pm}(z)} = \frac{d}{2} pV \iff pV = N k_B T \frac{I_{\alpha+1}^{\pm}(z)}{I_{\alpha}^{\pm}(z)} \quad (31)$$

Podemos reescribir la ecuación 30, despejando  $I_{d/2}^{\pm}(z)$  y definiendo el volumen por partícula  $v \equiv V/N$ , como:

$$I_{d/2}^{\pm}(z) = \frac{1}{g_s} \frac{\lambda^d}{v} \quad (32)$$

Por supuesto, si tomamos el límite a temperaturas altas, obtenemos la ecuación de estado del gas ideal y la ecuación de energía:

$$T \rightarrow \infty \implies pV = N k_B T \quad \text{y} \quad U = \frac{d}{2} N k_B T \quad (33)$$

Notar que la última ecuación es precisamente lo que se espera de acuerdo al teorema de equipartición. Ésto tiene sentido pues a temperaturas altas el sistema se vuelve clásico, con estadística de Boltzmann.

### 3. Sistema fermiónico a temperaturas bajas con densidad de estado

$$g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$$

Todo lo realizado en la sección 2 es válido para fermiones a cualquier temperatura evaluando en el signo  $\pm = +$ , renombrando luego a la función  $f_{\nu}(z) \equiv I_{\nu}^{+}(z)$ .

El límite a temperaturas altas realizado en dicha sección también es válido para fermiones.

Lo que falta realizar es el límite a temperaturas bajas  $T \rightarrow 0^{+} \iff \beta \rightarrow +\infty$  con  $N, V$  fijos, para lo cual es clave notar como se comporta la fugacidad  $z$  en éste límite observando la ecuación 13:

$$T \rightarrow 0^{+} \iff \beta \rightarrow +\infty \implies f_{\alpha}(z) = I_{\alpha}^{+}(z) = \frac{N}{\underbrace{D}_{\text{fijo}}} \underbrace{\beta^{\alpha}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \iff z \rightarrow +\infty \quad (34)$$

donde se utilizó que  $f_{\nu}(z) = I_{\nu}^{+}(z)$  es creciente con  $z$  y que  $f_{\nu}(z) = I_{\nu}^{+}(z) \rightarrow +\infty \iff z \rightarrow +\infty$ .

Por lo tanto, para tomar el anterior límite, es necesario tomar  $z \rightarrow +\infty$ . Y ésto implica que **en dicho límite podemos aplicar la expansión de Sommerfeld para  $f_\nu(z) = I_\nu^+(z)$ :**

$$\begin{aligned} f_\nu(z) = I_\nu^+(z) &= \frac{(\ln z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\nu(\nu-1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right) \\ &= \frac{\beta^\nu \mu^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\nu(\nu-1)}{\beta^2 \mu^2} + \mathcal{O}(\beta^{-4} \mu^{-4}) \right) \end{aligned} \quad (35)$$

donde se utilizó  $\ln z = \beta\mu$ .

Luego **podemos reemplazar ésto último en las expresiones obtenidas:**

$$\ln Z_{GC} = D \frac{1}{\beta^\alpha} I_{\alpha+1}^+(z) \simeq D \frac{1}{\beta^\alpha} \frac{(\ln z)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right) \quad (36)$$

Luego, **derivando**  $\ln Z_{GC}$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned} U &= - \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial \beta} \right|_z \simeq D \alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \frac{(\ln z)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \ln Z_{GC} = \alpha k_B T \ln Z_{GC} = \alpha (-\Omega) = \alpha pV \end{aligned} \quad (37)$$

Y también, utilizando la expansión de Sommerfeld en la expresión 13:

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta = D \frac{1}{\beta^\alpha} I_\alpha(z) \simeq D \frac{1}{\beta^\alpha} \frac{(\ln z)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right) \quad (38)$$

Si dividiésemos éstas dos expresiones, obtendríamos:

$$\frac{U}{N} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln z}{\alpha+1} \frac{\left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right)}{\left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right)} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \underbrace{\frac{\ln z}{\beta}}_{=\mu} \left( 1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{\alpha}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right) \quad (39)$$

donde se utilizó  $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$ , y se aproximó  $\frac{1+\epsilon_1}{1+\epsilon_2} = (1+\epsilon_1)(1-\epsilon_2) + \mathcal{O}(\epsilon_i^2) = 1 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) + \mathcal{O}(\epsilon_i^2)$ .

Notemos que en todas las expresiones que obtuvimos, está presente la fugacidad  $z$  que depende de alguna manera de las variables termodinámicas  $T, N, V$ . Entonces **para escribir a las expresiones anteriores explícitamente en términos de  $T, N, V$  necesitamos la expresión de  $z = z(T, N, V) = e^{\beta\mu(T, N, V)} \iff \ln z(T, N, V) = \beta\mu(T, N, V)$  como función de  $T, N, V$ , que la podemos despejar de la ecuación 38.** Podemos escribir ésta última ecuación como:

$$\begin{aligned} N &= \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(\ln z)^\alpha}{\beta^\alpha} \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha-1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(\ln z)^4}\right) \right) \\ &= \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} \mu^\alpha \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^2 \mu^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta^4 \mu^4}\right) \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Luego, si en particular evaluamos en  $T = 0 \iff 1/\beta = 0$ , obtenemos que las correcciones se eliminan:

$$N = \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} (\mu(T=0, N, V))^\alpha \implies \epsilon_F \equiv \mu(T=0, N, V) = \left( \frac{\Gamma(\alpha+1)}{D} N \right)^{1/\alpha} \quad (41)$$

donde se definió la energía de Fermi  $\epsilon_F$  como el valor del potencial químico a temperatura  $T = 0$ .

Luego, si se quiere obtener el potencial químico a temperaturas no nulas  $T \ll T_F \equiv \epsilon_F/k_B$  pequeñas respecto a la denominada **temperatura de Fermi**  $T_F \equiv \epsilon_F/k_B$ :

$$\begin{aligned} N &= \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} (\mu(T, N, V))^\alpha \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^2(\mu(T, N, V))^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta^4(\mu(T, N, V))^4}\right) \right) \\ &= \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} (\mu(T, N, V))^\alpha \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \alpha(\alpha-1) \frac{T^2}{T_F^2} + \mathcal{O}\left(\frac{T^3}{T_F^3}\right) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

donde se utilizó que  $\frac{1}{\beta\mu(T, V, N)} = \frac{k_B T}{\mu(T, V, N)} = \frac{k_B T}{\mu(T=0, V, N)(1 + \mathcal{O}(T/T_F))} = \frac{k_B T}{\epsilon_F} + \mathcal{O}\left(\frac{T^2}{T_F^2}\right) = \frac{T}{T_F} + \mathcal{O}\left(\frac{T^2}{T_F^2}\right) \implies \frac{1}{\beta^2(\mu(T, V, N))^2} = \frac{T^2}{T_F^2} + \mathcal{O}\left(\frac{T^3}{T_F^3}\right)$ .

Luego, de la anterior ecuación se puede despejar  $\mu(T, N, V)$ , considerando que  $\frac{1}{1+\epsilon} = 1 - \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  y que  $(1+\epsilon)^r = 1 + r\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ :

$$\begin{aligned} \mu(T, N, V) &= \left( \frac{\Gamma(\alpha+1)}{D} N \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} \alpha(\alpha-1) \frac{T^2}{T_F^2} + \mathcal{O}\left(\frac{T^3}{T_F^3}\right) \right) \right)^{1/\alpha} \\ &= \left( \frac{\Gamma(\alpha+1)}{D} N \right)^{1/\alpha} \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} \alpha(\alpha-1) \frac{T^2}{T_F^2} + \mathcal{O}\left(\frac{T^3}{T_F^3}\right) \right)^{1/\alpha} \\ &= \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} (\alpha-1) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{T^3}{T_F^3}\right) \right) \end{aligned} \quad (43)$$

donde se utilizó la expresión obtenida anteriormente de la energía de Fermi  $\epsilon_F$ .

Ahora bien, **a partir de éste resultado**  $\mu = \mu(T, N, V)$  **válido si**  $T \ll T_F$ , **podemos obtener la expresión**  $U = U(T, N, V)$  **(a partir de la cual podremos calcular el**  $C_V$ **)** reemplazando la anterior ecuación en la ecuación 39 (multiplicada por  $N$ ):

$$\begin{aligned} U(T, N, V) &= \frac{\alpha}{(\alpha+1)} N \mu(T, N, V) \left( 1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{\alpha}{\beta^2 \mu(T, N, V)^2} + \mathcal{O}(\beta^{-4} \mu(T, N, V)^{-4}) \right) \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha+1)} N \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} (\alpha-1) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{T}{T_F}\right)^3\right) \right) \left( 1 + \frac{\pi^2 2\alpha}{6} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{T}{T_F}\right)^3\right) \right) \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha+1)} N \epsilon_F \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} (\alpha+1) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{T}{T_F}\right)^3\right) \right) \end{aligned} \quad (44)$$

En particular, **a temperatura**  $T = 0$  **la energía media por partícula es**  $\langle \epsilon \rangle = \frac{U(T=0)}{N} = \frac{\alpha}{(\alpha+1)} \epsilon_F$ .

**Para obtener el**  $C_V$  **derivamos** la anterior expresión respecto de  $T$  a  $N, V$  constantes (lo cual lo podemos hacer gracias a que calculamos la expresión  $\mu = \mu(T, N, V)$  que nos permitió

expresar  $U = U(T, N, V)$ :

$$\begin{aligned}
C_V &= N c_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{N,V} = \frac{\alpha}{(\alpha+1)} N \epsilon_F \frac{\pi^2}{6} (\alpha+1) \frac{2T}{T_F^2} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) \\
&= N k_B \alpha \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{T_F} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) \\
\Rightarrow c_V &= k_B \alpha \frac{\pi^2}{3} \frac{T}{T_F} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{45}$$

Finalmente, si reemplazamos  $U = \alpha p V \iff p = \frac{U}{\alpha V}$  en la expresión 44 obtenida de  $U(T, N, V)$ :

$$p(T, N, V) = \frac{U(T, N, V)}{\alpha V} = \underbrace{\frac{1}{(\alpha+1)} \frac{N}{V}}_{\equiv p_F} \epsilon_F \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} (\alpha+1) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^3 \right) \right) \tag{46}$$

donde  $p(T=0) = p_F = \frac{1}{(\alpha+1)} \frac{\epsilon_F}{v}$  es la presión de Fermi del sistema.

Recopilando el comportamiento obtenido para sistemas fermiónicos a temperaturas altas (ver subsección 2.1) y bajas (ver presente sección) de  $c_V(T)$  y  $p(T)$ , podemos graficar dichas curvas:

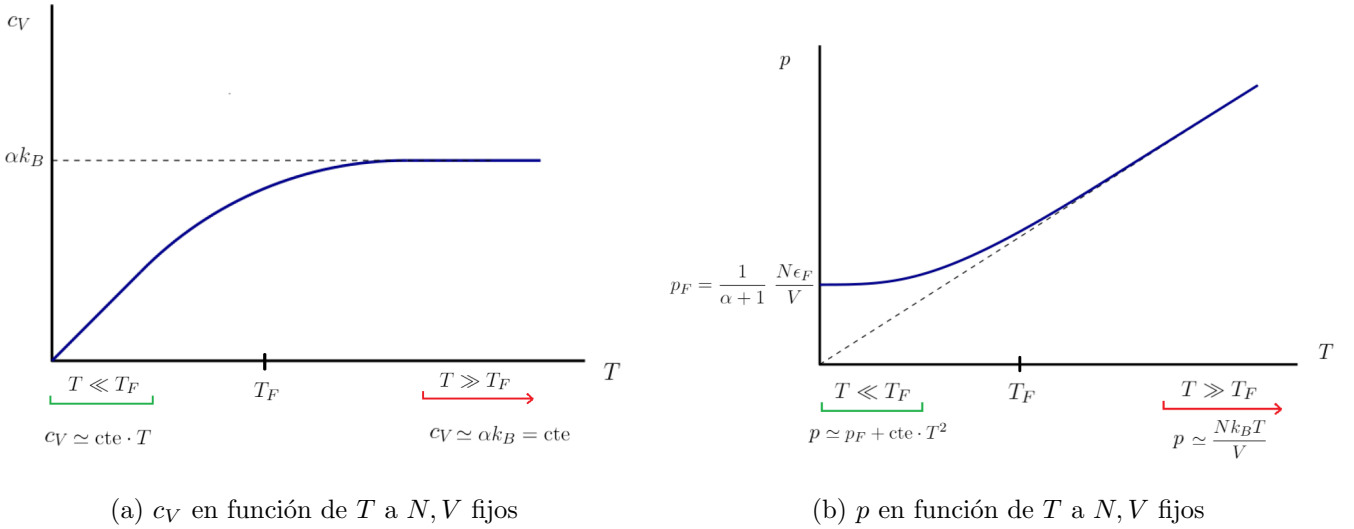


Figura 1: Se muestra en ambas figuras el comportamiento de  $c_V(T)$  y  $p(T)$  a  $N, V$  fijos para un sistema fermiónico con densidad de estados  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$  (curvas en color azul), se marca en líneas punteadas el comportamiento del sistema si tuviera estadística de Boltzmann, y se marca en particular el comportamiento de dichas funciones  $c_V(T)$  y  $p(T)$  tanto para temperaturas altas (color rojo) como para temperaturas bajas (color verde) respecto de la temperatura de Fermi  $T_F = \epsilon_F/k_B$ . Dichos comportamientos se obtuvieron realizando los límites de temperaturas altas (ver subsección 2.1) y los límites de temperaturas bajas (ver la presente sección) sobre un sistema fermiónico.

### 3.1. Temperatura cero

También podemos deducir el comportamiento del sistema a  $T = 0$  considerando que, evaluando en  $T = 0 \iff \beta = +\infty$  la ecuación 8 con signo + (pues el sistema es fermiónico):

$$n_f(\epsilon)|_{T=0} = n_+(\epsilon)|_{T=0} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \Big|_{T=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon < \mu(T=0) \equiv \epsilon_F \\ 0 & \text{si } \epsilon > \mu(T=0) \equiv \epsilon_F \end{cases} \iff n_+(\epsilon)|_{T=0} = \theta(\epsilon_F - \epsilon) \quad (47)$$

donde  $\theta(x)$  es la función theta de Heaviside (función escalón).

En consecuencia, utilizando que  $n_+(\epsilon)|_{T=0} = \theta(\epsilon_F - \epsilon)$ , en  $T = 0$  el número de partículas debe ser igual a:

$$N = \sum_{i \in \text{estados}} n_i = \sum_{\substack{i \in \text{estados} \\ \text{tal que } \epsilon_i < \epsilon_F}} 1 = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n_+(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon) \quad (48)$$

Notar que **en un sistema fermiónico a temperatura  $T = 0$ , ocurre que las  $N$  partículas ocupan los estados de menor energía posible de forma tal que no hayan dos partículas en un mismo estado.** Por lo tanto, como  $\epsilon_F$  es la energía máxima que puede poseer una partícula a  $T = 0$ , ocurre que deben haber precisamente  $N$  estados tales que  $\epsilon_i < \epsilon_F$ , de forma tal que a  $T = 0$  todas las  $N$  partículas ocupen cada uno de éstos  $N$  estados (sin que haya dos partículas en un mismo estado).

Luego, podemos despejar de la anterior ecuación a  $\epsilon_F$  considerando la densidad de estados  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$ :

$$\begin{aligned} N &= \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \frac{\epsilon^\alpha}{\alpha} \Big|_0^{\epsilon_F} = \frac{D}{\Gamma(\alpha)\alpha} \epsilon_F^\alpha = \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} \epsilon_F^\alpha \\ \implies \epsilon_F &= \left( \Gamma(\alpha+1) \frac{N}{D} \right)^{1/\alpha} \end{aligned} \quad (49)$$

Lo cual en efecto coincide con lo obtenido anteriormente para  $\epsilon_F = \epsilon_F(N, V)$ .

Luego, podemos también deducir la energía media del sistema a  $T = 0$  de forma similar:

$$\begin{aligned} U(T=0) &= \sum_{i \in \text{estados}} n_i \epsilon_i = \sum_{\substack{i \in \text{estados} \\ \text{tal que } \epsilon_i < \epsilon_F}} \epsilon_i = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n_+(\epsilon) \epsilon = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon) \epsilon \\ &= \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^\alpha = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \frac{\epsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^{\epsilon_F} = \frac{D}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)} \epsilon_F^{\alpha+1} = \frac{\alpha}{(\alpha+1)} \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} \epsilon_F^{\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha+1)} N \epsilon_F \end{aligned} \quad (50)$$

donde se utilizó en el último paso que  $N = \frac{D}{\Gamma(\alpha+1)} \epsilon_F^\alpha$



Y por último, si utilizamos que  $U = \alpha pV$ , podemos obtener la presión de Fermi a  $T = 0$ :

$$p_F = p(T = 0) = \frac{U(T = 0)}{\alpha V} = \frac{1}{\alpha + 1} \frac{N}{V} \epsilon_F = \frac{1}{\alpha + 1} \frac{\epsilon_F}{v} \quad (51)$$

Tanto la presión de Fermi  $p_F$  como la energía  $U(T = 0)$  a  $T = 0$  coinciden con lo obtenido anteriormente.

### 3.2. Caso particular: Gas ideal en $d$ dimensiones

Evaluando lo obtenido anteriormente en  $\alpha_{GI} = d/2$  y en  $D_{GI} = g_s V \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2}$ , podemos obtener la energía de Fermi que corresponde a un gas ideal en  $d$  dimensiones (ver ecuación 41):

$$\begin{aligned} \epsilon_F &= \left( \frac{\Gamma(\alpha_{GI} + 1)}{D_{GI}} N \right)^{1/\alpha_{GI}} = \left( \frac{\Gamma(d/2 + 1)}{g_s V} \left( \frac{h^2}{2\pi m} \right)^{d/2} N \right)^{2/d} = \frac{h^2}{2\pi m} \left( \frac{\Gamma(d/2 + 1)}{g_s} \frac{N}{V} \right)^{2/d} \\ &= \underbrace{2\pi\hbar^2/m}_{= 1/v} \underbrace{\left( \frac{N}{V} \right)^{2/d}}_{= 1/v} \end{aligned} \quad (52)$$

El potencial químico a temperaturas bajas  $T \ll T_F = \epsilon_F/k_B$  respecto de la temperatura de Fermi, es igual a (reemplazando  $D_{GI}, \alpha_{GI}$  en la ecuación 43):

$$\mu = \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{d}{2} - 1 \right) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \frac{T^3}{T_F^3} \right) \right) \quad (53)$$

donde la energía de Fermi está dada por la ecuación 52.

La energía media a temperaturas bajas  $T \ll T_F = \epsilon_F/k_B$  respecto de la temperatura de Fermi, es igual a (reemplazando  $D_{GI}, \alpha_{GI}$  en la ecuación 44):

$$U(T, N, V) = \frac{d/2}{(d/2 + 1)} N \epsilon_F \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^3 \right) \right) \quad (54)$$

donde la energía de Fermi está dada por la ecuación 52. En particular, a temperatura  $T = 0$  la energía media por partícula es  $\langle \epsilon \rangle = \frac{U(T = 0)}{N} = \frac{d/2}{(d/2 + 1)} \epsilon_F$ .

El  $C_V = N c_V$  a temperaturas bajas  $T \ll T_F = \epsilon_F/k_B$  respecto de la temperatura de Fermi, es igual a (reemplazando  $D_{GI}, \alpha_{GI}$  en la ecuación 45):

$$\begin{aligned} C_V = N c_V &= N k_B \frac{d \pi^2}{6} \frac{T}{T_F} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) \\ \Rightarrow c_V &= k_B \frac{d \pi^2}{6} \frac{T}{T_F} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (55)$$

Finalmente, si reemplazamos  $U = \alpha_{GI} pV \iff p = \frac{U}{\alpha_{GI} V}$  en la expresión obtenida de  $U(T, N, V)$  (con  $\alpha_{GI} = d/2$ ):

$$p(T, N, V) = \frac{U(T, N, V)}{(d/2)V} = \underbrace{\frac{1}{(d/2 + 1)} \frac{N}{V}}_{\equiv p_F} \epsilon_F \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{T}{T_F} \right)^3 \right) \right) \quad (56)$$

donde  $p(T=0) = p_F = \frac{1}{(d/2+1)} \frac{\epsilon_F}{v}$  es la presión de Fermi del sistema.

#### 4. Sistema bosónico con densidad de estado $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$

Consideremos sistemas bosónicos, por lo que el signo es  $\pm = -$  y la integral es la de Bose:  $I_\nu^-(z) = g_\nu(z)$ .

**Veamos porque las cuentas realizadas en la sección 2 no son válidas para sistemas bosónicos a temperaturas lo suficientemente bajas si  $\alpha > 1$ :**

Si fueran válidas, entonces podríamos tomar el límite  $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$  con  $N, V$  fijos en la ecuación 13:

$$T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty \implies g_\alpha(z) = \frac{N}{D} \beta^\alpha \rightarrow +\infty \quad (57)$$

Esto último es absurdo si  $\alpha > 1$  ya que en dicho caso, la función  $g_\alpha(z)$  no puede tomar valores arbitrariamente grandes, pues está acotada por  $g_\alpha(1) = \zeta(\alpha)$ . Ver apéndice B, recordar la

siguiente propiedad:  $g_\alpha(1) = \begin{cases} \zeta(\alpha) < \infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \infty & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases}$ .

**El absurdo es que si  $\alpha > 1$ ,  $N = \frac{D}{\beta^\alpha} g_\alpha(z) \leq \frac{D}{\beta^\alpha} \zeta(\alpha) \rightarrow 0^+$  al tomar el límite  $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$  con  $N, V$  fijos, pero lo anterior a su vez es igual a  $N$  que se debería mantener constante en el límite y distinto de cero.**

**Para entender de donde surge éste absurdo**, notamos que en el límite  $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$  con  $N, V$  fijos, el número medio de partículas con energía  $\epsilon \geq \epsilon_{\min} = 0 \geq \mu$  (donde se asumió que el estado fundamental - de menor energía - posee energía  $\epsilon_{\min} = 0$ ) está dado por la ecuación 8 (evaluando en el signo  $-$  pues el sistema es bosónico, y tomando el límite  $T \rightarrow 0$ ):

$$n_b(\epsilon)|_{T \rightarrow 0} = n_-(\epsilon)|_{T \rightarrow 0} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \Big|_{T \rightarrow 0} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon > \mu \\ \infty & \text{si } \epsilon = \mu \end{cases} \quad (58)$$

Es decir, vemos que en éste límite tiende a no haber partículas con energía estrictamente mayor a la energía del fundamental  $\epsilon_{\min} = 0$ , en cambio se tiende a que todas las  $N$  partículas del sistema posean la energía del estado fundamental  $\epsilon_{\min} = 0$  (que es la menor energía posible).

**Luego, en éste límite, la contribución del estado fundamental es muy importante y no puede ser despreciada de ninguna forma.** Notemos que el absurdo se resolvería si se añade un término  $N_0$  a lo anterior que compense ésta diferencia en el límite  $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$  con  $N, V$  fijos:

$$\underbrace{N}_{\text{fijo}} = \underbrace{\frac{D}{\beta^\alpha} g_\alpha(z)}_{\rightarrow 0^+} \underbrace{+ N_0}_{\rightarrow N^-} \quad (59)$$

Por lo explicado anteriormente, físicamente el número  $N_0$  se debe corresponder al **número de partículas en el estado fundamental**, pues en el límite  $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$  con  $N, V$  fijos ocurre que todas las  $N$  partículas pasan a estar en el estado fundamental.

Éste razonamiento nos motiva a añadir la contribución del estado fundamental aparte en las sumatorias sobre los estados monoparticulares, pues al aproximar  $\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon) \simeq \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon)$  con  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$  para cualquier función  $f$  (que es un paso clave en la sección 2), se está subestimando muchísimo la contribución del fundamental. La razón de ésto último es que la integral entre 0 e  $\infty$  daría prácticamente lo mismo que entre  $\epsilon_1$  y  $\infty$  para un cierto  $0 < \epsilon_1 \ll 1$ , entonces la contribución de las energías entre 0 y  $\epsilon_1 \ll 1$  es despreciable; pero en el límite  $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$  la contribución de la energía del fundamental  $\epsilon_{\min} = 0$  es clave.

Para añadir la contribución del fundamental aparte, extraemos su contribución de la sumatoria de los estados: <sup>3</sup>

$$\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) = \overbrace{g_0 f_0}^{\equiv g_0 f_0} + \sum_{\substack{i \in \text{estados} \\ \text{no fundamentales}}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) \simeq g_0 f_0 + \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) \quad (60)$$

Donde se consideró que la degeneración del estado fundamental es  $g_0$ , es decir que hay  $g_0$  estados con energía  $\epsilon_{\min} = 0$ . Si la degeneración del estado fundamental sólo proviene de la degeneración del spin de las partículas, entonces  $g_0 = g_s = 2s + 1$ .

Luego, hay que modificar la ecuación 9 (evaluando en el signo  $\pm = -$ ) añadiendo la contribución del estado fundamental, lo cual nos dará un nuevo término en  $\ln Z_{GC}$  que se corresponderá con el comportamiento de las partículas en el estado fundamental:

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= \sum_{i \in \text{estados}} \ln Z_i = \sum_{i \in \text{estados}} -\ln(1 - ze^{-\beta \epsilon_{\text{estado } i}}) = \overbrace{-g_0 \ln(1 - z)}^{= \ln Z_0} + \sum_{\substack{i \in \text{estados} \\ \text{no fundamentales}}} -\ln(1 - ze^{-\beta \epsilon_i}) \\ &= -g_0 \ln(1 - z) + \int d\epsilon g(\epsilon) \left( -\ln(1 - ze^{-\beta \epsilon}) \right) \end{aligned} \quad (61)$$

Si evaluamos en la anterior expresión en la densidad de estados  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$ , considerando que el intervalo de posibles energías es  $[0, \infty]$ :

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= -g_0 \ln(1 - z) + \int_0^\infty d\epsilon \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1} (-\ln(1 - ze^{-\beta \epsilon})) \\ &= -g_0 \ln(1 - z) + D \frac{1}{\beta^\alpha} g_{\alpha+1}(z) \end{aligned} \quad (62)$$

<sup>3</sup>Equivalentemente, se podría haber añadido a la densidad de estados un término que sea una delta de Dirac:  $g(\epsilon) \rightarrow g(\epsilon) + g_0 \delta(\epsilon)$ , pero no adoptaremos éste enfoque, sólo añadiremos explícitamente la contribución del fundamental en las sumatorias sobre estados monoparticulares y listo.

Luego, **derivando**  $\ln Z_{GC}$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned} U &= - \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial\beta} \right|_z = D\alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} g_{\alpha+1}(z) = \frac{\alpha}{\beta} (\ln Z_{GC} - \ln Z_0) = \alpha k_B T (\ln Z_{GC} - g_0(-\ln(1-z))) \\ &= \alpha (-\Omega - k_B T(-\ln(1-z))) = \alpha (pV - g_0 k_B T(-\ln(1-z))) = \alpha pV \left( 1 - \frac{g_0 k_B T(-\ln(1-z))}{pV} \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Notemos que **añadir la contribución del estado fundamental aparte no incide en la energía media**  $U$ . Ésto tiene sentido pues el estado fundamental posee energía 0, luego su contribución no incide en  $U$ . Ésta ecuación 63 es la misma que la ecuación 12 obtenida en la sección 2. De todos modos, incide en la presión por el término  $g_0 k_B T \ln(1-z)$  pero, como veremos luego, éste término es despreciable en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ .

Y también:

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta = \frac{z g_0}{1-z} + D \frac{1}{\beta^\alpha} z (g_{\alpha+1})'(z) = \underbrace{\frac{g_0}{z^{-1}-1}}_{\equiv N_0} + D \frac{1}{\beta^\alpha} g_\alpha(z) \quad (64)$$

donde en efecto recuperamos la ecuación 59, donde  $N_0 = z \left. \frac{\partial(\ln Z_0)}{\partial z} \right|_\beta = \frac{g_0}{z^{-1}-1}$  es el **número de partículas que se encuentran en el estado fundamental (con energía mínima  $\epsilon_{\min} = 0$ )**. Ésta ecuación difiere de la ecuación 13 obtenida en la sección 2, pues **la contribución del término fundamental es apreciable**. A partir de ésta ecuación se obtendría la expresión de  $z$  en función de  $T, N, V$ .

Prestemos atención a la última ecuación:

$$N = \underbrace{\frac{g_0}{z^{-1}-1}}_{\equiv N_0} + D \frac{1}{\beta^\alpha} \underbrace{g_\alpha(z)}_{\leq g_\alpha(1)} \iff 1 = \underbrace{\frac{g_0}{N(z^{-1}-1)}}_{= N_0/N \equiv f_0} + \frac{D}{N} \frac{1}{\beta^\alpha} \underbrace{g_\alpha(z)}_{\leq g_\alpha(1)} \quad (65)$$

Donde se definió la **fracción de partículas en el estado fundamental**  $f_0 \equiv \frac{N_0}{N} = \frac{g_0}{N(z^{-1}-1)}$ .

Lo primero que podemos observar es que siempre es válido que (considerando  $\mu < 0 \iff z = e^{-\beta\mu} < 1 \iff z^{-1} - 1 > 0$ ):

$$N \geq N_0 = \frac{g_0}{z^{-1}-1} \iff z^{-1} - 1 \geq \frac{g_0}{N} \iff z \leq \frac{1}{1 + g_0/N} \equiv z_{\text{Max}} < 1 \quad (66)$$

Y en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$  tenemos que  $z_{\text{Max}} \rightarrow 1^-$ . Luego, **tomando en dicho límite termodinámico a  $z_{\text{Max}} = 1$ , se tienen dos casos**:

1. **Caso 1:**  $z < z_{\text{Max}} = 1$ . En éste caso, se tiene que la fracción de partículas en el estado fundamental es, en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ :

$$f_0 \equiv \frac{N_0}{N} = \frac{g_0}{N(z^{-1}-1)} \simeq 0 \quad (67)$$

Gracias a que  $z < 1 \iff z^{-1} - 1 \neq 0$

Entonces **la fracción de partículas en el estado fundamental resulta despreciable**, y en consecuencia se puede despreciar:

$$N \simeq D \frac{1}{\beta^\alpha} g_\alpha(z) \quad (68)$$

Puesto que  $g_\alpha$  es una función creciente, entonces  $z < 1 \iff g_\alpha(z) < g_\alpha(1)$  y luego, considerando la ecuación anterior, pedir la condición  $z < 1$  de éste caso es equivalente a pedir:

$$z < z_{\text{Max}} = 1 \iff N < D \frac{1}{\beta^\alpha} g_\alpha(1) = D g_\alpha(1) (k_B T)^\alpha \iff T > \frac{1}{k_B} \left( \frac{N}{D g_\alpha(1)} \right)^{1/\alpha} \equiv T_C \quad (69)$$

donde **se definió la temperatura crítica**  $T_C$ . Notar que  $T_C = T_C(N, V)$ , considerando que  $D$  puede llegar a depender de  $V$ . Notar también que **si  $\alpha > 1$  la temperatura crítica  $T_C$  es no nula pues  $g_\alpha(1) = \zeta(\alpha) < \infty$ ; y si  $\alpha \leq 1$  se tiene que  $T_C = 0$  pues  $g_\alpha(1) = \infty$ , en cuyo caso siempre nos encontraremos en el caso 1 para temperaturas  $T > 0$ .**

Si  $D = D(V)$ , se puede traducir la anterior condición a:

$$z < 1 \iff T > T_C \iff D(V) g_\alpha(1) (k_B T)^\alpha > N \iff D(V) > \frac{N}{g_\alpha(1) (k_B T)^\alpha} \equiv D_C \equiv D(V_C) \quad (70)$$

Por otro lado, como  $z < 1 \implies 1-z \neq 0$ , se tiene que el término  $\frac{\ln Z_0}{\ln Z_{GC}} = \frac{g_0 k_B T (-\ln(1-z))}{pV}$  de la ecuación 63 es despreciable en el límite termodinámico (pues el volumen  $V$  es una cantidad extensiva):

$$U = \alpha \frac{D}{\beta^{\alpha+1}} g_{\alpha+1}(z) \simeq \alpha k_B T \ln Z_{GC} = \alpha(-\Omega) = \alpha pV \quad (71)$$

En consecuencia, como la ecuación 71 es la misma que la ecuación 12 y la ecuación 68 (válida si  $z < 1 \iff T > T_C$ ) es la misma que la ecuación 13, **todo lo realizado en la sección 2 es válido para sistemas bosónicos que se encuentren en el caso 1: Si  $z < 1 \iff T > T_C$ .** En particular, el  $C_V = N c_V$  y la presión  $p = p(T, N, V)$  en éste caso es el mismo que el obtenido en la sección 2: Ver ecuación 18 para el  $C_V = N c_V$  y ecuación 14 para  $p$ .

Notemos que en éste caso, no se puede tomar el límite de temperaturas bajas (con  $N, V$  fijos) pues al hacerlo ya no resulta válido que  $T > T_C$ . En cambio, sí se puede tomar el límite a temperaturas altas, y se obtiene lo mismo que se obtiene en la subsección 2.1.

2. **Caso 2:**  $z = z_{\text{Max}} = 1 \iff T \leq T_C$ . Ésta equivalencia es válida por lo obtenido en el caso anterior:  $z < 1 \iff T > T_C$ , y porque no es posible tener  $z > 1$ . **Se asume**

$\alpha > 1$  **para que**  $T_C > 0$ . En caso de que  $D = D(V)$ , la anterior condición es equivalente a  $D(V) \leq D_C = D(V_C)$ .

En éste caso, **la fracción de partículas en el estado fundamental ya no es despreciable pues**  $z^{-1} - 1 = 0$ . Debido a ésto último, si el sistema bosónico se encuentra en éste caso, se dice que es un **condensado de Bose-Einstein**. Podemos calcular dicha fracción como:

$$f_0 = \frac{N_0}{N} = 1 - \frac{D}{N} \frac{1}{\beta^\alpha} g_\alpha(1) = 1 - \underbrace{k_B^\alpha \frac{D g_\alpha(1)}{N}}_{= T_C^{-\alpha}} T^\alpha = 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^\alpha \quad (72)$$

Recordar que: Si  $\alpha > 1$  la temperatura crítica  $T_C$  es no nula pues  $g_\alpha(1) = \zeta(\alpha) < \infty$ , y luego en éste caso hay condensado de Bose-Einstein para temperaturas no nulas; y si  $\alpha \leq 1$  se tiene que  $T_C = 0$  pues  $g_\alpha(1) = \infty$ , en cuyo caso siempre nos encontraremos en el caso 1 para temperaturas  $T > 0$ , luego en éste caso no hay condensado de Bose-Einstein para temperaturas no nulas.

Vemos en definitiva que **para que haya condensado de Bose-Einstein para temperaturas no nulas es necesario y suficiente pedir que**  $\alpha > 1 \iff T_C > 0$ . En éste caso, hay una fracción de las  $N$  partículas  $f_0$  muy apreciable en el estado fundamental, que es más grande cuanto más pequeña sea  $T$  (respecto a  $T_C$ ). Es por ésto que asumimos que  $\alpha > 1$  para estudiar éste caso.

Si  $D$  depende explícitamente de  $V$ , entonces  $T_C = T_C(N, V)$ , y luego la fracción de partículas en el fundamental  $f_0 = 1 - \left( \frac{T}{T_C(N, V)} \right)^\alpha$  se puede escribir en función de  $T, N, V$ ; y luego se puede analizar como varía  $f_0$  al variar  $T$  con  $V, N$  fijos y también al variar  $V$  con  $T$  fijo.

Consideremos la expresión de la energía [63](#) en éste caso, con  $z = 1$ . Notemos primero que  $f_0 = \frac{N_0}{N} = \frac{g_0 z}{N(1-z)} = 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^\alpha \implies (1-z)^{-1} = \frac{N f_0}{g_0 z} = \frac{N(1 - (T/T_C)^\alpha)}{g_0} \implies \frac{\ln Z_0}{\ln Z_{GC}} = \frac{k_B T \ln Z_0}{pV} = \frac{k_B T g_0 \ln((1-z)^{-1})}{pV} = \frac{k_B T g_0 (\ln(N f_0 / g_0))}{pV}$ , por lo tanto en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$  la cantidad  $\frac{\ln Z_0}{\ln Z_{GC}} = \frac{k_B T g_0 (-\ln(1-z))}{pV} \sim \frac{\ln N}{V} \sim \frac{\ln N}{N} \rightarrow 0$  es despreciable. Por lo tanto, podemos aproximar la ecuación [63](#), considerando  $z = 1$  y  $\alpha + 1 > 1$ :

$$U = \alpha \frac{D}{\beta^{\alpha+1}} g_{\alpha+1}(z=1) = \alpha D k_B^{\alpha+1} T^{\alpha+1} \zeta(\alpha+1) \simeq \alpha k_B T \ln Z_{GC} = \alpha(-\Omega) = \alpha pV \quad (73)$$

Escribiendo a  $D = D(V)$ , se tiene la expresión de  $U = U(T, N, V)$ . Y si asumimos que

$\alpha > 1 \iff T_C \neq 0$ , podemos expresar:

$$U = \alpha \zeta(\alpha + 1) \underbrace{\frac{Nk_B}{\zeta(\alpha)T_C^\alpha}}_{Dk_B^{\alpha+1}} T^{\alpha+1} = \alpha \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} Nk_B T \left(\frac{T}{T_C}\right)^\alpha = \alpha \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} Nk_B T_C \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\alpha+1} \quad (74)$$

Escribiendo a  $T_C = T_C(N, V)$  (o a  $D = D(V)$ ), se tiene la expresión de  $U = U(T, N, V)$ . Derivando lo anterior respecto de  $T$  a  $N, V$  constantes se obtiene el  $C_V = Nc_V$  (asumiendo que  $\alpha > 1 \iff T_C \neq 0$  en los pasos en los que aparece  $T_C$ ):

$$\begin{aligned} C_V = Nc_V &= \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{N, V} = \alpha(\alpha + 1) \zeta(\alpha + 1) \underbrace{\frac{Dk_B^{\alpha+1}}{Nk_B}}_{\zeta(\alpha)T_C^\alpha} T^\alpha = \alpha(\alpha + 1) \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} Nk_B \left(\frac{T}{T_C}\right)^\alpha \\ \implies c_V &= \alpha(\alpha + 1) \zeta(\alpha + 1) \frac{D}{N} k_B^\alpha T^\alpha = \alpha(\alpha + 1) \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} k_B \left(\frac{T}{T_C}\right)^\alpha \end{aligned} \quad (75)$$

Por último, considerando que  $U \simeq \alpha pV \iff p \simeq \frac{U}{\alpha V}$  (ver ecuación 73), podemos obtener la presión en éste caso a partir de la expresión obtenida de la energía  $U$  en éste caso:

$$p \simeq \frac{U}{\alpha V} = \frac{D}{V} k_B^{\alpha+1} T^{\alpha+1} \zeta(\alpha+1) = \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \frac{Nk_B T}{V} \left(\frac{T}{T_C}\right)^\alpha = \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \frac{Nk_B T_C}{V} \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\alpha+1} \quad (76)$$

**Rescapitulando, obtuvimos lo siguiente:**

**La temperatura crítica del sistema es:**

$$T_C = \frac{1}{k_B} \left(\frac{N}{Dg_\alpha(1)}\right)^{1/\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{k_B} \left(\frac{N}{D\zeta(\alpha)}\right)^{1/\alpha} > 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ 0 & \text{si } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (77)$$

**Si  $\alpha > 1$  entonces  $T_C > 0$  y hay condensado de Bose-Einstein a temperaturas no nulas  $T \leq T_C$ . Y si  $\alpha \leq 1$  entonces  $T_C = 0$  y no hay condensado de Bose-Einstein a temperaturas no nulas.**

**En caso de que  $D = D(V)$ , siendo  $D_C \equiv D(V_C) \equiv \frac{N}{g_\alpha(1) (k_B T)^\alpha}$ , es equivalente pedir las condiciones:**

$$\begin{cases} z < 1 \iff T > T_C \iff D(V) > D_C = D(V_C) \iff V > V_C \\ z = 1 \iff T \leq T_C \iff D(V) \leq D_C = D(V_C) \iff V \leq V_C \end{cases} \quad (78)$$

donde en la última equivalencia se asumió que  $D = D(V)$  es estrictamente creciente, y se tomó  $V_C \equiv D^{-1}(D_C)$ . Luego, **se puede pensar en atravesar la transición de fase del condensado variando  $T$  con  $V$  constante o también variando  $V$  con  $T$  constante.**

La fracción de partículas en el estado fundamental es:

$$f_0 = \frac{N_0}{N} = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \\ 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^\alpha & \text{si } T \leq T_c \end{cases} \quad (79)$$

El cambio abrupto en la derivada de  $f_0$  en  $T = T_C$  nos dice que hay una **transición de fase con parámetro de orden**  $f_0$ , que debido a que  $f_0$  es continua en  $T = T_C$  y su derivada no, es una transición de fase **de segundo orden**.

Podemos ver un gráfico de  $f_0(T)$  a  $N, V$  fijos en la siguiente figura:

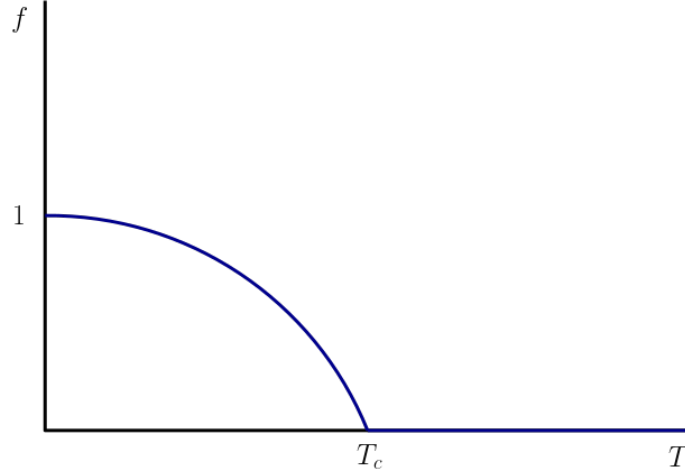


Figura 2: Fracción de partículas  $f(T) = f_0(T)$  en el estado fundamental en función de  $T$  a  $N, V$  fijos.

La **energía media** es igual a (asumiendo sólo en el segundo renglón que  $\alpha > 1 \iff T_C \neq 0$  y utilizando  $\zeta(\alpha) D k_B^{\alpha+1} = N k_B T_C^{-\alpha}$ , y aplicando el límite termodinámico en el tercer renglón; ver ecuaciones 71 y 73):

$$\begin{aligned} U &= \alpha D k_B^{\alpha+1} T^{\alpha+1} g_{\alpha+1}(z) \\ &= \alpha \frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(\alpha)} N k_B T \left(\frac{T}{T_C}\right)^\alpha \frac{g_{\alpha+1}(z)}{\zeta(\alpha+1)} = \alpha \frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(\alpha)} N k_B T_C \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\alpha+1} \frac{g_{\alpha+1}(z)}{\zeta(\alpha+1)} \quad (80) \\ &\simeq \frac{\alpha}{\beta} \ln Z_{GC} = \alpha k_B T \ln Z_{GC} = \alpha (-\Omega) = \alpha pV \end{aligned}$$

donde  $\frac{g_{\alpha+1}(z)}{\zeta(\alpha+1)}$  en particular es igual a 1 si  $T \leq T_C \iff z = 1$ .

Considerando que  $U \simeq \alpha pV \iff p \simeq \frac{U}{\alpha V}$  (aplicando el límite termodinámico), podemos obtener **la presión** en éste caso a partir de la expresión obtenida de la energía  $U$  en éste caso (asumiendo sólo en la última igualdad que  $\alpha > 1 \iff T_C \neq 0$ ):

$$p \simeq \frac{U}{\alpha V} = \frac{D}{V} k_B^{\alpha+1} T^{\alpha+1} g_{\alpha+1}(z) = \frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(\alpha)} \frac{N k_B T_C}{V} \left(\frac{T}{T_C}\right)^{\alpha+1} \frac{g_{\alpha+1}(z)}{\zeta(\alpha+1)} \quad (81)$$

donde  $\frac{g_{\alpha+1}(z)}{\zeta(\alpha+1)}$  en particular es igual a 1 si  $T \leq T_C \iff z = 1$ .



Derivando a  $U$  respecto de  $T$  a  $N, V$  constantes se obtiene  $\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{c_V}{k_B}$ :

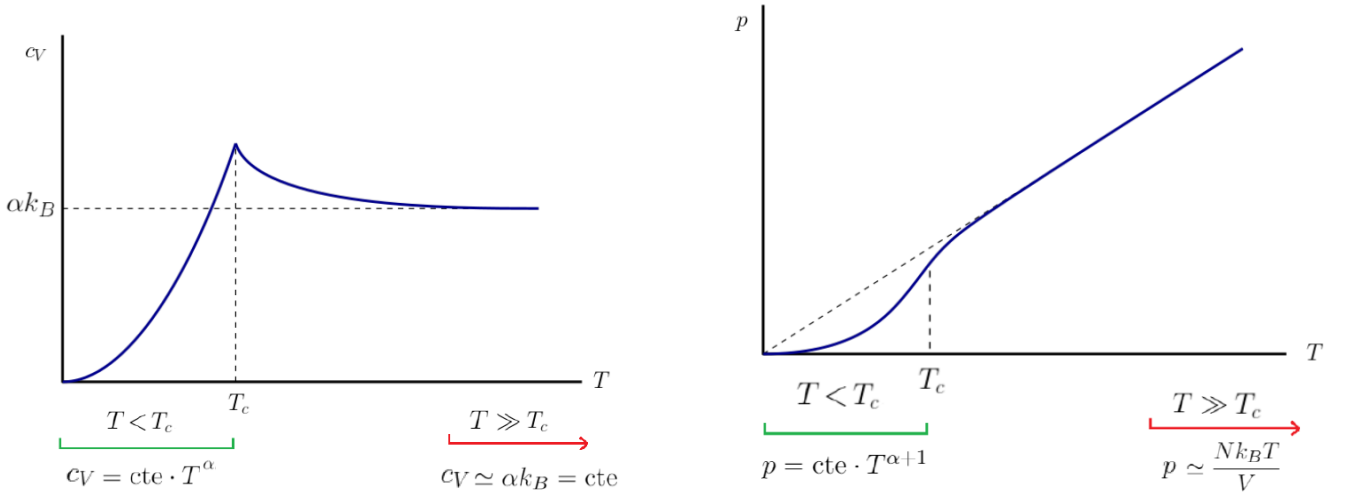
$$\frac{c_V}{k_B} = \begin{cases} \alpha \left( (\alpha + 1) \frac{g_{\alpha+1}(z)}{g_\alpha(z)} - \alpha \frac{g_\alpha(z)}{g_{\alpha-1}(z)} \right) = \alpha(\alpha + 1) \frac{g_{\alpha+1}(z)}{g_\alpha(z)} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{(g_\alpha(z))^2}{g_{\alpha+1}(z)g_{\alpha-1}(z)} \right) & \text{si } T > T_C \\ \alpha(\alpha + 1) \zeta(\alpha + 1) \frac{D}{N} k_B^\alpha T^\alpha = \alpha(\alpha + 1) \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \left( \frac{T}{T_C} \right)^\alpha & \text{si } T \leq T_C \end{cases} \quad (82)$$

Notar que si  $\alpha > 1 \iff T_C \neq 0$  (es decir si hay condensado), entonces si tomamos el límite  $T \rightarrow T_C^+$  de la expresión del caso  $T > T_C$ , éste es equivalente a tomar el límite  $z \rightarrow 1^-$ , y se obtiene:

$$\lim_{T \rightarrow T_C^\pm} \frac{c_V}{k_B} = \begin{cases} \alpha(\alpha + 1) \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{\zeta(\alpha)^2}{\zeta(\alpha + 1)g_{\alpha-1}(1)} \right) & \text{si } T > T_C \\ \alpha(\alpha + 1) \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\zeta(\alpha)} & \text{si } T \leq T_C \end{cases} \quad (83)$$

Los anteriores dos límites coinciden sólo si  $1 < \alpha \leq 2$  pues sólo en ese caso:  $(g_{\alpha-1}(1))^{-1} = 0$ . Luego, tenemos que: Si  $\alpha \leq 1$  entonces  $T_C = 0$  y no hay condensado; si  $1 < \alpha \leq 2$  entonces hay condensado, y el  $C_V$  es continuo en la transición de fase; y si  $2 < \alpha$  entonces hay condensado, y el  $C_V$  no es continuo en la transición de fase.

Recopilando el comportamiento obtenido para sistemas bosónicos a temperaturas altas (ver subsección 2.1) y bajas (ver presente sección) de  $c_V(T)$  y  $p(T)$ , **podemos graficar dichas curvas**:



(a)  $c_V$  en función de  $T$  a  $N, V$  fijos para  $1 < \alpha \leq 2$ . En caso de que  $\alpha > 2$ , ocurre que  $c_V(T)$  es discontinua en  $T_c$ ; y si  $\alpha \leq 1$  no hay transición de fase, y luego no hay discontinuidad de  $c_V$  ni de su derivada en  $T_c$ .

(b)  $p$  en función de  $T$  a  $N, V$  fijos para todo  $\alpha > 0$

Figura 3:  $c_V(T)$  y  $p(T)$  a  $N, V$  fijos para un sistema bosónico.

Se muestra en ambas figuras el comportamiento de  $c_V(T)$  y  $p(T)$  a  $N, V$  fijos para un sistema bosónico con densidad de estados  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$  (curvas en color azul), se marca en líneas punteadas el comportamiento del sistema si tuviera estadística de Boltzmann, y se marca en particular el comportamiento de dichas funciones  $c_V(T)$  y  $p(T)$  tanto para temperaturas altas respecto a la temperatura crítica  $T_c$  (color rojo) como para temperaturas menores o iguales a la crítica  $T_c$  (color verde). La figura b es válida para todo  $\alpha > 0$ ; pero para la figura a se supuso que  $1 < \alpha \leq 2$ , de forma que haya una transición de fase hacia un condensado de Bose-Einstein (lo cual ocurre si y sólo si  $\alpha > 1$ ) pero que  $c_V(T)$  sea continuo en dicha transición (lo cual ocurre en  $1 < \alpha \leq 2$ ), pues si tomáramos  $\alpha > 2$  ocurría que  $c_V(T)$  iba a ser discontinuo en  $T_c$ , y si tomáramos  $\alpha \leq 1$  ni siquiera había una transición (podríamos haber explorado los gráficos  $c_V(T)$  que corresponden a éstos casos también igual). Dichos comportamientos se obtuvieron realizando los límites de temperaturas altas (ver subsección 2.1) y los límites de temperaturas bajas (ver la presente sección) sobre un sistema bosónico.

**Se pueden comparar éstos gráficos  $c_V(T)$ ,  $p(T)$  de la figura 3 (para sistemas bosónicos) con los de la figura 1 (para sistemas fermiónicos) para comparar el comportamiento físico de ambos sistemas con distintos tipos de estadística cuántica: Se observan similitudes a temperaturas altas en ambos sistemas que se corresponden a su vez con un sistema con estadística de Boltzmann; y a temperaturas bajas el comportamiento es muy distinto en ambos sistemas, pues en un sistema fermiónico hay una presión no nula  $p_F$  (de Fermi) a temperatura  $T = 0$  debido al principio de exclusión de Pauli (no todas las partículas pueden estar en el fundamental y deben ser repartidas en los estados de menor energía sin que haya dos partículas en un mismo estado), y en un sistema bosónico la presión a  $T = 0$  es nula pues todas las partículas están en el estado fundamental. Por otro lado, también en el  $c_V$  de sistemas bosónicos se observa una discontinuidad en la derivada del  $c_V$  respecto a  $T$  (si  $1 < \alpha \leq 2$ ) o en el  $c_V$  (si  $\alpha > 2$ ), que nos muestra la presencia de una transición de fase en sistemas bosónicos (con  $\alpha > 1$ ) que no existe y no observamos en sistemas fermiónicos.**

#### 4.1. Caso particular: Gas ideal en $d$ dimensiones

Evaluemos lo obtenido anteriormente en  $\alpha_{GI} = d/2$  y en  $D_{GI} = g_s V \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{d/2}$ , considerando en particular que  $D_{GI} \beta^{-\alpha_{GI}} = D_{GI} (k_B T)^{\alpha_{GI}} = g_s V \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{d/2} = g_s V / \lambda^d$  donde  $\lambda = \lambda(T) = \lambda(\beta)$  es la longitud de onda térmica del sistema:

La temperatura crítica del sistema es:

$$T_C = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left( \frac{1}{g_s v g_{d/2}(1)} \right)^{2/d} = \begin{cases} \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left( \frac{1}{g_s v \zeta(d/2)} \right)^{2/d} > 0 & \text{si } d/2 > 1 \iff d > 2 \\ 0 & \text{si } d/2 \leq 1 \iff d \leq 2 \end{cases} \quad (84)$$

Si  $\alpha_{GI} > 1 \iff d/2 > 1 \iff d > 2 \iff d \geq 3$  entonces  $T_C > 0$  y hay condensado de Bose-Einstein a temperaturas no nulas  $T \leq T_C$ . Y si  $d \leq 2$  entonces  $T_C = 0$  y no hay condensado de Bose-Einstein a temperaturas no nulas.

Notar que, si en la anterior expresión pasamos  $T_C$  dividiendo y el paréntesis lo pasamos multiplicando al otro lado de la igualdad, obtenemos el cuadrado de la longitud de onda térmica  $\lambda_C \equiv \lambda(T_C)$  evaluada en la temperatura crítica:

$$\lambda_C^2 = (g_s v g_{d/2}(1))^{2/d} \iff \lambda_C^d = g_s v g_{d/2}(1) \iff g_s \frac{v}{\lambda_C^d} = \frac{1}{g_{d/2}(1)} \quad (85)$$

De ésta forma, puesto que  $1/\lambda^d \propto T^{d/2}$ , se pueden traducir las condiciones que determinan si estamos o no en el condensado de la forma:

$$\begin{cases} z < 1 \iff T > T_C \iff g_s \frac{v}{\lambda^d} > \frac{1}{g_{d/2}(1)} = \left( g_s \frac{v}{\lambda^d} \right)_C \iff v > v_C(T) \equiv \frac{\lambda^d}{g_s g_{d/2}(1)} \\ z = 1 \iff T \leq T_C \iff g_s \frac{v}{\lambda^d} \leq \frac{1}{g_{d/2}(1)} = \left( g_s \frac{v}{\lambda^d} \right)_C \iff v \leq v_C(T) \equiv \frac{\lambda^d}{g_s g_{d/2}(1)} \end{cases} \quad (86)$$

Luego, se puede pensar en atravesar la transición de fase del condensado variando  $T$  con  $v = V/N$  constante o también variando  $v = V/N$  con  $T$  constante.

Notar en particular que  $\frac{T}{T_C} = \frac{2\pi m k_B T}{h^2} (g_s v g_{d/2}(1))^{2/d} = \left( g_s \frac{v}{\lambda^d} g_{d/2}(1) \right)^{2/d} \iff \left( \frac{T}{T_C} \right)^{d/2} = g_s \frac{v}{\lambda^d} g_{d/2}(1)$ .

La fracción de partículas en el estado fundamental es:

$$f_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c \iff g_s \frac{v}{\lambda^d} g_{d/2}(1) > 1 \iff v > v_C \\ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{d/2} = 1 - g_s \frac{v}{\lambda^d} g_{d/2}(1) = 1 - \frac{v}{v_C} & \text{si } T \leq T_c \iff g_s \frac{v}{\lambda^d} g_{d/2}(1) \leq 1 \iff v \leq v_C \end{cases} \quad (87)$$

La energía media, evaluando  $D_{GI}, \alpha_{GI}$  en la ecuación 80, es igual a (asumiendo sólo en el segundo renglón que  $d \geq 3 \iff T_C \neq 0$  y utilizando que  $D_{GI} \beta^{-\alpha_{GI}} = D_{GI} (k_B T)^{\alpha_{GI}} = g_s V \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{d/2} = g_s V / \lambda^d$ ):

$$\begin{aligned} U &= \frac{d}{2} k_B T g_s \frac{V}{\lambda^d} g_{d/2+1}(z) = \frac{d}{2} N k_B T g_s \frac{v}{\lambda^d} g_{d/2+1}(z) \\ &= \frac{d}{2} \frac{\zeta(d/2+1)}{\zeta(d/2)} N k_B T \left( \frac{T}{T_C} \right)^{d/2} \frac{g_{d/2+1}(z)}{\zeta(d/2+1)} = \frac{d}{2} \frac{\zeta(d/2+1)}{\zeta(d/2)} N k_B T_C \left( \frac{T}{T_C} \right)^{d/2+1} \frac{g_{d/2+1}(z)}{\zeta(d/2+1)} \\ &\simeq \frac{d/2}{\beta} \ln Z_{GC} = \frac{d}{2} k_B T \ln Z_{GC} = \frac{d}{2} (-\Omega) = \frac{d}{2} pV \end{aligned} \quad (88)$$

donde  $\frac{g_{d/2+1}(z)}{\zeta(d/2+1)}$  en particular es igual a 1 si  $T \leq T_C \iff z = 1$ .

Considerando que  $U \simeq \frac{d}{2}pV \iff p \simeq \frac{U}{(d/2)V}$  (aplicando el límite termodinámico), podemos obtener la presión en éste caso a partir de la expresión obtenida de la energía  $U$  en éste caso (asumiendo sólo en la última igualdad que  $d \geq 3 \iff T_C \neq 0$  y utilizando que  $D_{GI}\beta^{-\alpha_{GI}}/V = D_{GI}(k_B T)^{\alpha_{GI}}/V = g_s \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{d/2} = g_s/\lambda^d$ ):

$$p \simeq \frac{U}{(d/2)V} = \frac{g_s}{\lambda^d} k_B T g_{d/2+1}(z) = \frac{\zeta(d/2+1)}{\zeta(d/2)} \frac{N k_B T_C}{V} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{d/2+1} \frac{g_{d/2+1}(z)}{\zeta(d/2+1)} \quad (89)$$

donde  $\frac{g_{d/2+1}(z)}{\zeta(d/2+1)}$  en particular es igual a 1 si  $T \leq T_C \iff z = 1$ .

Derivando a la ecuación obtenida de  $U$  respecto de  $T$  a  $N, V$  constantes se obtiene  $\frac{C_V}{N k_B} = \frac{c_V}{k_B}$ :

$$\frac{c_V}{k_B} = \begin{cases} \frac{d}{2} \left( \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \frac{g_{d/2+1}(z)}{g_{d/2}(z)} - \frac{d}{2} \frac{g_{d/2}(z)}{g_{d/2-1}(z)} \right) & \text{si } T > T_C \\ \frac{d}{2} \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \zeta(d/2+1) \frac{g_s v}{\lambda^d} = \frac{d}{2} \left( \frac{d}{2} + 1 \right) \frac{\zeta(d/2+1)}{\zeta(d/2)} \left( \frac{T}{T_C} \right)^{d/2} & \text{si } T \leq T_C \end{cases} \quad (90)$$

Notar que, por lo razonado al final de la subsección anterior: Si  $\alpha_{GI} \leq 1 \iff d \leq 2$  entonces  $T_C = 0$  y no hay condensado; si  $1 < \alpha_{GI} \leq 2 \iff 2 < d \leq 4 \iff d = 3, 4$  entonces hay condensado, y el  $C_V$  es continuo en la transición de fase; y si  $2 < \alpha_{GI} \iff d \geq 5$  entonces hay condensado, y el  $C_V$  no es continuo en la transición de fase.

## A. Estadística de Boltzmann

Para ver como queda la función de partición  $Z_{GC}$  en el **ensamble gran canónico de un sistema de  $N$  partículas indistinguibles con estadística de Boltzmann (es decir, tratando la indistinguibilidad de forma aproximada con el conteo correcto de Boltzmann)**, ver ecuación 70 del apunte *más sobre ensambles* de la guía 3<sup>4</sup>. El resultado es el siguiente:

$$Z_{GC} = e^{zQ_1} \iff \ln Z_{GC} = zQ_1 = z \sum_{i \in \text{estados}} e^{-\beta \epsilon_{\text{estado } i}} \quad (91)$$

donde  $Q_1$  es la función de partición canónica que corresponde a una sólo partícula.

Luego:

$$\ln Z_{GC} = zQ_1 = z \sum_{i \in \text{estados}} e^{-\beta \epsilon_{\text{estado } i}} = z \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) e^{-\beta \epsilon} \quad (92)$$

<sup>4</sup>Ver <http://materias.df.uba.ar/ft3a2020c1/files/2020/04/Maximizaci%C3%B3n-de-entrop%C3%ADa-e-introducci%C3%B3n-a-ensambles-version2.pdf>

Evaluando en  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$ :

$$\ln Z_{GC} = z \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} e^{-\beta\epsilon} = \frac{zD}{\beta^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} e^{-x} = \frac{D}{\beta^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{z^{-1}e^x} \quad (93)$$

Notando que  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} e^{-x}$ :

$$\ln Z_{GC} = D \frac{1}{\beta^\alpha} z \quad (94)$$

Luego, derivando  $\ln Z_{GC}$ , podemos calcular:

$$\begin{aligned} U &= - \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial\beta} \right|_z = D\alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} z \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \ln Z_{GC} = \alpha k_B T \ln Z_{GC} = \alpha (-\Omega) = \alpha pV \end{aligned} \quad (95)$$

Y también:

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta = D \frac{1}{\beta^\alpha} z(z)' = D \frac{1}{\beta^\alpha} z = \ln Z_{GC} \quad (96)$$

Si dividiésemos éstas dos expresiones, obtendríamos:

$$\frac{U}{N} = \alpha \frac{1}{\beta} \iff U = \alpha N k_B T = \alpha pV \iff pV = N k_B T \quad (97)$$

**Notar que deducimos la ecuación de estado del gas ideal  $pV = N k_B T$ , y también que  $U \propto N k_B T$ .**

Si quisieramos calcular el  $C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V,N}$ , tendríamos que derivar a  $U(T, V, N)$  escrito en función de  $T, V, N$ . Pero la expresión  $U = D\alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} z$  está en función  $z$ , que a su vez es una función de  $T, V, N$  que se puede despejar explícitamente de 96:  $z = \beta^\alpha N/D$ . Ésta expresión de  $z(T, N, V)$  se podría reemplazar en  $U = D\alpha \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \beta^\alpha N/D = \alpha N/\beta = \alpha N k_B T$ , que es lo mismo que se obtuvo al dividir  $U/N$ .

Gracias a que en la expresión  $U = \alpha N k_B T$  no aparece  $z$ , ésta es en efecto la expresión  $U = U(T, N, V) = \alpha N k_B T$  de  $U$  escrita explícitamente en función de  $T, N, V$ . Luego, a partir de dicha expresión  $U(T, V, N)$  podemos derivarla y obtener la capacidad calorífica  $C_V$  y el calor específico  $c_V = C_V/N$  por partícula a volumen constante:

$$C_V = N c_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V,N} = N \alpha k_B \implies c_V = \alpha k_B \quad (98)$$

Vemos en definitiva que ésto es un gas ideal, pues verifica su ecuación de estado  $pV = N k_B T$ , y también que  $c_V = \alpha k_B = \text{cte}$  (ésto último es puesto que  $U \propto N k_B T$ ).

También podemos obtener a partir de  $e^{\beta\mu} = z = z(T, N, V) = \beta^\alpha N/D$ , deducir la expresión del potencial químico:

$$e^{\beta\mu} = z = z(T, N, V) = \frac{\beta^\alpha N}{D} \implies \mu = \mu(T, V, N) = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{\beta^\alpha N}{D} \right) = k_B T \ln \left( \frac{N}{D (k_B T)^\alpha} \right) \quad (99)$$

En general, el volumen  $V$  del sistema está dentro de la constante  $D$ .

Podríamos calcular también la entropía del sistema, considerando que el multiplicador de Lagrange asociado a  $N$  en el gran canónico es  $\gamma = -\ln z \iff z = e^{-\gamma}$ :

$$\begin{aligned}
S &= k_B (\ln Z_{GC} + \beta U - \ln(z)N) = k_B (\ln Z_{GC} + \beta U - \ln(z)N) \\
&= k_B (N + \alpha N - \ln(z)N) = k_B N \left( \alpha + 1 - \ln \left( \frac{\beta^\alpha N}{D} \right) \right) \\
&= k_B N \left( \alpha + 1 - \ln \left( \left( \frac{\alpha N}{U} \right)^\alpha \frac{N}{D} \right) \right) \\
&= k_B N (\alpha + 1 - \alpha \ln \alpha - (\alpha + 1) \ln N + \ln(U^\alpha D))
\end{aligned} \tag{100}$$

donde se reemplazó  $\ln Z_{GC} = N$ ,  $\beta U = \alpha N \iff U/N = \alpha/\beta$ ,  $z = \beta^\alpha N/D$  y  $\beta = \alpha N/U$ . En efecto, se logró expresar la entropía  $S = S(U, N, V)$ .

## B. Integrales de Fermi y Bose

Sea  $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x} = \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-x}$  la función Gamma <sup>5</sup> definida de esa forma para  $\nu > 0$ , que verifica las propiedades:  $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$  y  $\Gamma(n) = (n-1)!$  para todo  $\nu > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ . La función Gamma se entiende luego como una extensión del factorial  $(n-1)!$  a los números reales positivos  $\nu > 0$  (y más aún, se puede extender su dominio a casi todo  $\nu \in \mathbb{C}$ ).

Consideremos las funciones definidas por las integrales

$$I_\nu^\pm(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x \pm 1} \tag{101}$$

que están bien definidas para  $\nu > 0$  y para  $z \geq 0$  (excepto  $I_\nu^-$ , que como veremos luego, está sólo bien definida para  $0 \leq z < 1$ ).

Éstas son funciones distintas según cuál sea el signo  $\pm$ , que se denotan como:

$$\begin{cases} f_\nu(z) \equiv I_\nu^+(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x + 1} & \text{Integral de Fermi} \\ g_\nu(z) \equiv I_\nu^-(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x - 1} & \text{Integral de Bose} \end{cases} \tag{102}$$

Hay diversas propiedades de éstas funciones que son válidas para ambos signos:

$$I_\nu^\pm(z) \text{ es creciente} \tag{103}$$

$$z \frac{\partial}{\partial z} (I_\nu^\pm(z)) = I_{\nu-1}^\pm(z) \tag{104}$$

$$I_\nu^\pm(z) \simeq z + \mathcal{O}(z^2) \text{ para } z \ll 1 \tag{105}$$

En cambio hay otras propiedades que difieren según cuál sea el signo  $\pm$ :

<sup>5</sup>Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function)

Por un lado, la expansión asintótica de  $f_\nu(z)$  para  $z \rightarrow \infty$  es lo que se conoce como la aproximación de Sommerfeld, y es la siguiente:

$$f_\nu(z) = I_\nu^+(z) = \frac{(\ln z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left( 1 + \frac{\pi^2 \nu(\nu-1)}{6 (\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right) \quad (106)$$

Por otro lado, a diferencia de la función  $f_\nu$ , la función  $g_\nu(z)$  sólo está definida para  $0 \leq z < 1$ .

Y para  $z = 1$  se puede definir:

$$g_\nu(1) = \begin{cases} \zeta(\nu) & \text{si } \nu > 1 \\ \infty & \text{si } 0 < \nu \leq 1 \end{cases} \quad (107)$$

Siendo  $\zeta(\nu)$  la función zeta de Riemann <sup>6</sup>. En cambio, si  $\nu \leq 1$ , la integral  $g_\nu(1)$  diverge a  $\infty$ .

En particular, ocurre que:

$$\text{Si } \nu > 1 \implies 0 \leq g_\nu(z) \leq g_\nu(1) = \zeta(\nu) < \infty \quad (108)$$

Es decir que si  $\nu > 1$ , la función  $g_\nu(z)$  no puede tomar valores arbitrariamente grandes, es decir  $g_\nu(z) \not\rightarrow \infty$ . En cambio, si  $0 < \nu \leq 1$ , la función  $g_\nu(z)$  toma valores arbitrariamente grandes (es decir  $g_\nu(z) \rightarrow \infty$ ) cuando  $z \rightarrow 1^-$ .

Las únicas integrales  $I_\nu^\pm(z)$  con  $\nu > 0$  que poseen expresiones en términos de funciones elementales son las que poseen  $\nu = 1$ :

$$\begin{cases} f_1(z) \equiv I_1^+(z) = \ln(1+z) & \text{para } z \geq 0 \text{ y } \nu > 0 \\ g_1(z) \equiv I_1^-(z) = -\ln(1-z) & \text{para } 0 \geq z < 1 \text{ y } \nu > 0 \end{cases} \quad (109)$$

Éstas integrales se relacionan con lo que se conoce en matemática como el polilogaritmo <sup>7</sup>  $\text{Li}_\nu(z)$  de la forma:

$$\begin{cases} f_\nu(z) \equiv I_\nu^+(z) = -\text{Li}_\nu(-z) & \text{para } z \geq 0 \text{ y } \nu > 0 \\ g_\nu(z) \equiv I_\nu^-(z) = \text{Li}_\nu(z) = -f_\nu(-z) & \text{para } 0 \geq z < 1 \text{ y } \nu > 0 \end{cases} \quad (110)$$

<sup>6</sup>Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann\\_zeta\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function)

<sup>7</sup>Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Polylogarithm#Integral\\_representations](https://en.wikipedia.org/wiki/Polylogarithm#Integral_representations)

## C. Ejercicios para practicar

En éste apunte, analizamos un sistema con una densidad de estados genérica dada por una ley de potencias  $g(\epsilon) = \frac{D}{\Gamma(\alpha)} \epsilon^{\alpha-1}$ , y en particular analizamos un gas ideal en  $d$  dimensiones.

Para practicar, les sugerimos realizar **explícitamente** las cuentas realizadas en éste apunte (para fermiones y/o para bosones según qué quieran practicar o en qué guía estén) para los siguientes sistemas físicos:

1. Un sistema de partículas con spin  $s$  en dimensión  $d$ , con energía  $\epsilon(p) = \xi p^n$  donde  $\xi$  es simplemente una constante positiva,  $g_s = 2s + 1$ ,  $d, n$  son números naturales (mayores o iguales a 1), y  $p = \|\vec{p}\|$ . Éste sistema es el del ejercicio 1 de la guía 5. Por analogía con el caso usual, conviene definir una longitud térmica  $\lambda$  proporcional a  $\beta^{1/n}$ .

Si la cuenta general le resulta muy complicada puede primero intentar hacer la cuenta en el caso particular  $d = 3$  (o si quiere en  $d = 1, 2, 4$ , como guste) con  $\epsilon(p) = \frac{1}{2m} p^2$  (es decir un gas ideal de partículas masivas), y comparar lo que obtuvo con lo realizado genéricamente aquí para  $d$ . Es decir, evaluar el caso anterior en  $\xi = 1/(2m)$  y  $n = 2$ .

Y si la cuenta general le resulta muy complicada y si se aburrió del gas ideal, puede primero intentar hacer la cuenta en el caso particular  $d = 3$  con  $\epsilon(p) = c p$  (es decir un gas de partículas ultrarelativistas libres (como fotones) en  $d = 3$  dimensiones). Es decir, evaluar el caso anterior en  $\xi = c$  y  $n = 1$  y  $d = 3$ .

2. Un sistema de partículas con spin  $s$  en dimensión  $d$ , con la energía de un oscilador armónico clásico  $\epsilon(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$  con  $p = \|\vec{p}\|$  y  $q = \|\vec{q}\|$ .

Si la cuenta general le resulta muy complicada (ésta de hecho es más complicada que las anteriores), puede intentar hacer la cuenta sólo para el caso particular  $d = 3$ .

Después de hacer la cuenta explícita, pueden comparar las cuentas que obtienen con reemplazar las constantes  $D, \alpha$  correspondientes a su sistema físico en las ecuaciones de éste apunte, pero hagan la cuenta explícita.