

# Estadística cuántica

Guillem Pérez Nadal

## Prefacio

Estas notas son un repaso de estadística cuántica, que no es otra cosa que un tratamiento exacto de la indistinguibilidad de las partículas de un gas ideal. De momento le prestamos más atención a los fermiones, que son el tema de la guía 4, pero en breve modificaremos este documento agregando un estudio más detallado del gas de bosones. Para más información, les recomiendo consultar las notas de David Tong sobre el tema, que pueden encontrar [acá](#). Este documento incluye la resolución de los problemas 1, 4 y 5 de la guía 4.

## 1 Partícula libre en una caja

Cuando estudiamos el gas ideal en la guía anterior, lo hicimos tratando a cada partícula clásicamente, con una única salvedad: declaramos que los estados de una partícula no son puntos del espacio de fases sino cajitas de volumen  $h^3$ , donde  $h$  es la constante de Planck. El resultado que obtuvimos para la función de partición canónica de una partícula es

$$Z_1 = \frac{V}{\lambda^3} \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}. \quad (1)$$

El objetivo de esta sección es mostrar que esta forma de caracterizar los estados de una partícula está totalmente de acuerdo con la física cuántica. Lo haremos calculando  $Z_1$  de vuelta, pero con un tratamiento puramente cuántico, y viendo que se recupera el resultado (1) (eso es básicamente lo que pide el problema 1 de la guía 4). Consideremos, pues, una partícula libre cuántica de masa  $m$  en una caja cúbica de lado  $L$ . Las autofunciones del hamiltoniano cumplen

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = \epsilon \psi \quad (2)$$

junto con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \psi(0, x_2, x_3) &= \psi(L, x_2, x_3) = 0 \\ \psi(x_1, 0, x_3) &= \psi(x_1, L, x_3) = 0 \\ \psi(x_1, x_2, 0) &= \psi(x_1, x_2, L) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

que imponen que  $\psi$  se anule en la superficie de la caja. Resolvamos este problema por separación de variables, es decir, proponiendo una solución de la forma

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3). \quad (4)$$

Reemplazando en (2) y dividiendo por  $\psi$  se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\psi_1''}{\psi_1} + \frac{\psi_2''}{\psi_2} + \frac{\psi_3''}{\psi_3} \right) = \epsilon, \quad (5)$$

y las condiciones de contorno (3) toman la forma

$$\psi_i(0) = \psi_i(L) = 0. \quad (6)$$

Ahora, cada término en el lado izquierdo de la ecuación (5) es función de una variable distinta. La única forma de que la suma de los tres términos sea igual a una constante es que cada término sea constante,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi_i'' = \epsilon_i \psi_i, \quad (7)$$

es decir, que  $\psi_i$  cumpla la ecuación de Schrödinger de una partícula libre en una dimensión. Reemplazando esta ecuación de vuelta en (5) se obtiene

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3. \quad (8)$$

La solución general de (7) es

$$\psi_i(x_i) = A_i \sin(k_i x_i) + B_i \cos(k_i x_i) \quad \epsilon_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m}, \quad (9)$$

y las condiciones de contorno (6) implican

$$B_i = 0 \quad k_i = \frac{\pi n_i}{L} \quad (10)$$

con  $n_i = 1, 2, 3, \dots$ , de manera que

$$\psi_i(x_i) = A_i \sin\left(\frac{\pi n_i}{L} x_i\right) \quad \epsilon_i = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n_i}{L}\right)^2. \quad (11)$$

Reemplazando este resultado en (4) y (8) se obtienen las autofunciones y autoenergías del hamiltoniano (falta determinar la constante  $A_i$  por normalización, pero no nos vamos a preocupar por eso porque es irrelevante para lo que queremos hacer). Calculemos ahora la función de partición canónica de la partícula. Nótese que cada estado está caracterizado por un triplete  $(n_1, n_2, n_3)$  de números naturales. Si pensamos en  $n_i$  como el estado del grado de libertad  $i$  y en  $\epsilon_i$  como su energía, tenemos: (i) los grados de libertad son distinguibles, porque llevan una etiqueta; (ii) el estado de cada grado de libertad es independiente de los demás; y (iii) la energía de la partícula es la suma de las energías de cada grado

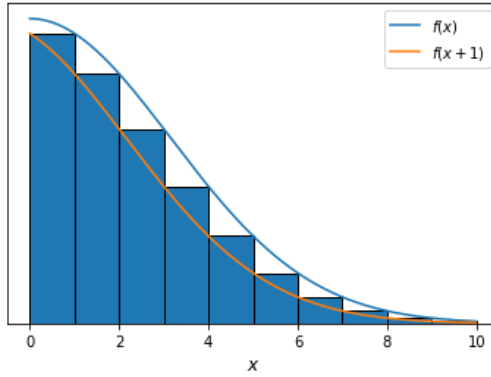
de libertad. Por lo tanto, la función de partición factoriza como el producto de las de cada grado de libertad, y como éstos son idénticos tenemos

$$Z_1 = (Z_{1,1})^3, \quad (12)$$

donde  $Z_{1,1}$  es la función de partición de un grado de libertad,

$$Z_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\beta \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi n}{L} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Esta suma no la sabemos calcular, pero podemos encontrar una buena aproximación para ella. En efecto, consideremos una función  $f$  positiva y decreciente como la que se representa en la curva azul de la siguiente figura.



Claramente, la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  es el área del histograma que aparece en esta figura (porque el ancho de las barras es 1 y la altura de la  $n$ -ésima barra es  $f(n)$ ), y por lo tanto se puede acotar por las áreas bajo las curvas azul y naranja,

$$\int_0^{\infty} dx f(x+1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{\infty} dx f(x). \quad (14)$$

La diferencia relativa entre la cota superior y la cota inferior es

$$\frac{\int_0^{\infty} dx f(x) - \int_0^{\infty} dx f(x+1)}{\int_0^{\infty} dx f(x)} = \frac{\int_0^1 dx f(x)}{\int_0^{\infty} dx f(x)}. \quad (15)$$

Si  $f$  decae muy lentamente, el denominador es mucho mayor al numerador, de manera que la ventana (14) se hace muy estrecha y podemos aproximar<sup>1</sup>

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \simeq \int_0^{\infty} dx f(x). \quad (16)$$

<sup>1</sup>Nótese que el numerador de (15) es una cota superior a  $f(1)$ , así que, cuando esta aproximación es válida, la contribución del primer término, es decir, el término más grande, es despreciable frente a la suma; esto va a ser importante cuando estudiemos bosones.

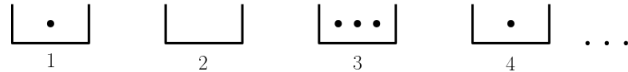
Volviendo al caso que nos ocupa, nosotros estamos interesados eventualmente en el límite termodinámico, en el que  $L \rightarrow \infty$ , y por lo tanto podemos asumir que  $L$  es muy grande. En ese caso, la exponencial que aparece en (13) decae muy lentamente, así que podemos aproximar la suma por una integral. Usando la fórmula de la integral gaussiana,  $\int_0^\infty \exp(-\alpha x^2) = (1/2)\sqrt{\pi/\alpha}$ , obtenemos

$$Z_{1,1} = L\sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}} = \frac{L}{\lambda}, \quad (17)$$

donde en la última igualdad hemos usado que  $h = 2\pi\hbar$ . Reemplazando en (12) vemos que  $Z_1$  está dado por la ecuación (1), como habíamos anticipado. Por lo tanto, la forma “semiclásica” de caracterizar los estados de una partícula que habíamos usado en la guía anterior está bien y no necesita ser corregida (más adelante va a haber que matizar esta afirmación en relación con la nota al pie 1, pero de momento no nos vamos a preocupar por eso).

## 2 Estadística cuántica

Lo que sí debe ser corregido es nuestra forma aproximada de dar cuenta de la indistinguibilidad de las partículas, basada en el conteo de Boltzmann. Consideremos un sistema de partículas indistinguibles que no interactúan entre sí. ¿Qué es dar un microestado de este sistema? Es decir cuántas partículas se encuentran en cada *estado monoparticular* o estado de una partícula. Podemos visualizar los estados monoparticulares como cajas; entonces un microestado genérico es como se muestra en la figura.



El microestado representado tiene una partícula en el primer estado monoparticular, ninguna en el segundo, tres en el tercero, etc. Si definimos el estado de la caja  $i$  como el número de partículas que hay en esa caja, entonces dar un microestado del sistema es dar el estado de cada caja. En el ensamble canónico los estados de las distintas cajas no son independientes entre sí debido al vínculo del número de partículas, pero en el ensamble grancanónico sí lo son. Dado que, además, las cajas son distinguibles y la energía y el número de partículas son la suma de las energías y números de partículas que hay en cada caja, la función de partición grancanónica factoriza,

$$Z_{GC} = \prod_i Z_i, \quad (18)$$

donde  $Z_i$  es la función de partición grancanónica de la caja  $i$ . Si  $\epsilon_i$  denota la energía del estado monoparticular  $i$ , entonces la energía de la caja cuando tiene  $n$  partículas es  $n\epsilon_i$ , de manera que

$$Z_i = \sum_n e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n} = \sum_n (ze^{-\beta\epsilon_i})^n, \quad (19)$$

donde  $z = e^{\beta\mu}$  es la fugacidad. Ahora, debemos distinguir entre dos posibilidades: si las partículas son *fermiones* (spin semi-impar) no puede haber más de una en cada caja, mientras que si son *bosones* (spin entero) el número de partículas por caja puede ser cualquiera<sup>2</sup>. Por lo tanto, tenemos

$$Z_i = \sum_{n=0}^1 (ze^{-\beta\epsilon_i})^n = 1 + ze^{-\beta\epsilon_i} \quad (\text{fermiones}) \quad (20)$$

$$Z_i = \sum_{n=0}^{\infty} (ze^{-\beta\epsilon_i})^n = \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_i}} \quad (\text{bosones}). \quad (21)$$

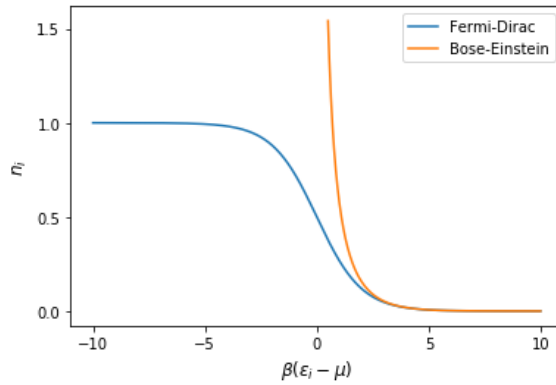
Nótese que, en el caso de los bosones, la convergencia de la serie (21) requiere que  $ze^{-\beta\epsilon_i} < 1$ , o lo que es lo mismo,  $\mu < \epsilon_i$ . Tenemos, pues, una cota superior al potencial químico de los bosones para cada estado monoparticular; el conjunto de todas estas cotas se resume en la más fuerte de todas,  $\mu < \epsilon_{\min}$ , o equivalentemente  $z < e^{\beta\epsilon_{\min}}$ , donde  $\epsilon_{\min}$  es la mínima energía de una partícula. Podemos agrupar las ecuaciones (20) y (21) en una sola si tomamos el logaritmo,

$$\ln Z_i = \pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i}), \quad (22)$$

donde tenemos que acordarnos de que el signo de arriba corresponde a fermiones y el de abajo corresponde a bosones. La derivada de esta ecuación respecto a  $z$  nos da el número medio de partículas en el estado monoparticular  $i$ ,

$$n_i = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_i = \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon_i} \pm 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \pm 1} \equiv n_{\pm}(\epsilon_i) \quad (23)$$

(nótese que  $n_{\pm}(\epsilon)$  no es el número medio de partículas con energía  $\epsilon$ ; ese número es  $n_{\pm}(\epsilon)$  multiplicado por el número de estados monoparticulares con energía  $\epsilon$ ). Las funciones  $n_+$  y  $n_-$  se llaman respectivamente la *distribución de Fermi-Dirac* y la *distribución de Bose-Einstein*. Las representamos en la siguiente figura.



<sup>2</sup>Esto es lo que dice el *teorema de spin-estadística*, que es un resultado de la teoría cuántica de campos y que desgraciadamente no tiene una explicación intuitiva (por lo menos hasta donde yo sé), así que nos lo tendremos que creer.

Como vemos, en el caso de los fermiones  $n_i$  nunca es mayor a 1, mientras que en el de los bosones puede tomar cualquier valor positivo. Tomando el logaritmo de (18) y usando (22) obtenemos

$$\ln Z_{GC} = \pm \sum_i \ln (1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i}). \quad (24)$$

La suma sobre estados monoparticulares de cualquier función  $f$  de la energía se puede reescribir como una integral sobre energías,

$$\sum_i f(\epsilon_i) = \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon), \quad (25)$$

donde  $\epsilon_{\min}$  y  $\epsilon_{\max}$  son las energías mínima y máxima de una partícula, y  $g(\epsilon) d\epsilon$  es el número de estados monoparticulares con energía entre  $\epsilon$  y  $\epsilon + d\epsilon$ . En particular,

$$\ln Z_{GC} = \pm \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) \ln (1 \pm ze^{-\beta\epsilon}). \quad (26)$$

La función  $g(\epsilon)$  se llama *densidad de estados*, y depende de cuál sea la dinámica de las partículas que forman el sistema. Para seguir, pues, tenemos que asumir algo sobre esa dinámica.

Supongamos que las partículas de nuestro sistema son partículas libres. Entonces los estados monoparticulares son cajitas de volumen  $h^3$  en el espacio de fases y sus energías son  $\epsilon(p, q) = p^2/2m$ . Bueno, en realidad eso es verdad sólo si las partículas tienen spin 0; si tienen spin  $s$ , para cada una de esas cajitas hay  $g_s = 2s + 1$  estados monoparticulares, todos ellos con la misma energía, que corresponden a los distintos valores que puede tomar la componente  $z$  del spin ( $g_s$  se conoce como la *degeneración de spin*). Particularizando la ecuación (25) a este caso vemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) &= g_s \int \frac{d^3p d^3q}{h^3} f(p^2/2m) = g_s \frac{V}{h^3} \int d^3p f(p^2/2m) \\ &= g_s \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 f(p^2/2m) \\ &= g_s \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon \sqrt{\epsilon} f(\epsilon), \end{aligned} \quad (27)$$

donde en la segunda línea hemos pasado a esféricas y en la tercera hemos reescrito la integral sobre el módulo del impulso como una integral sobre la energía. Así pues, en este caso la densidad de estados es

$$g(\epsilon) = g_s \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \sqrt{\epsilon}. \quad (28)$$

**Ejercicio para ustedes.** La densidad de estados (28) corresponde a un gas tridimensional; rehagan la cuenta para dimensiones 1 y 2, y generalicen a dimensión arbitraria usando la fórmula del área de la esfera de radio 1 en un espacio de  $d$  dimensiones,  $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ .

Reemplazando el resultado (28) en (26) y definiendo  $x = \beta\epsilon$  obtenemos

$$\ln Z_{\text{GC}} = \pm g_s \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx \sqrt{x} \ln(1 \pm ze^{-x}), \quad (29)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda térmica de de Broglie, ecuación (1). Nótese que, como en este caso  $\epsilon_{\text{min}} = 0$ , el potencial químico de los bosones cumple  $\mu < 0$  y por lo tanto  $z < 1$ . La integral que queda la podemos hacer por partes,

$$\ln Z_{\text{GC}} = \pm g_s \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \left[ x^{3/2} \ln(1 \pm ze^{-x}) \Big|_0^\infty \pm \int_0^\infty dx x^{3/2} \frac{ze^{-x}}{1 \pm ze^{-x}} \right]. \quad (30)$$

Claramente, el término de borde se anula en el límite inferior. También se anula en el límite superior, porque para  $x$  grande se puede aproximar  $\ln(1 \pm ze^{-x}) \simeq \pm ze^{-x}$ , así que todo el término de borde se anula y tenemos

$$\ln Z_{\text{GC}} = g_s \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{V}{\lambda^3} \int_0^\infty dx \frac{x^{3/2}}{z^{-1}e^x \pm 1} \quad (31)$$

(nótese que, en el integrando de (30), hemos dividido arriba y abajo por  $ze^{-x}$ ). Definamos ahora la función

$$I_\nu^\pm(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x \pm 1}, \quad (32)$$

donde

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty dx x^{\nu-1} e^{-x} \quad (33)$$

es la [función gamma](#), que seguramente ya conocen en detalle. Comparando (31) con (32), y teniendo en cuenta que  $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ , obtenemos finalmente

$$\ln Z_{\text{GC}} = g_s \frac{V}{\lambda^3} I_{5/2}^\pm(z). \quad (34)$$

Esta ecuación nos da la relación fundamental para el potencial gran-canónico, y por lo tanto tiene toda la información termodinámica sobre el sistema. Para poder extraer esa información debemos familiarizarnos con la función  $I_\nu^\pm$ , así que ahí van algunas de sus propiedades.

- (i)  $I_\nu^\pm$  es creciente. Esto es fácil de ver: a medida que aumenta  $z$ , disminuye el denominador en (32).

(ii)  $(I_\nu^\pm)'(z) = I_{\nu-1}^\pm(z)/z$  si  $\nu > 1$ . Para ver esto calculemos la derivada,

$$\begin{aligned} (I_\nu^\pm)'(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx x^{\nu-1} \frac{z^{-2}e^x}{(z^{-1}e^x \pm 1)^2} \\ &= -\frac{z^{-1}}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx x^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{z^{-1}e^x \pm 1} \right). \end{aligned}$$

Integrando por partes, notando que el término de borde se anula para  $\nu > 1$  y usando que  $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)\Gamma(\nu - 1)$  se llega al resultado.

(iii)  $I_\nu^\pm(z) \simeq z$  para  $z \ll 1$ . Esta propiedad también es muy fácil: si  $z$  es muy chico, podemos ignorar el término  $\pm 1$  en el denominador de (32); usando la definición de la función gamma, ecuación (33), se llega al resultado.

Ahora podemos calcular la energía y el número de partículas a partir de sus expresiones en el grancanónico,

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{GC} = \frac{3}{2} kT g_s \frac{V}{\lambda^3} I_{5/2}^\pm(z) \quad (35)$$

$$N = z \frac{\partial}{\partial z} \ln Z_{GC} = g_s \frac{V}{\lambda^3} I_{3/2}^\pm(z), \quad (36)$$

donde en la segunda ecuación hemos usado la propiedad (ii) de  $I_\nu^\pm$ . Teniendo en cuenta la relación entre la función de partición grancanónica y el potencial grancanónico,  $\Xi = -kT \ln Z_{GC}$ , y que  $\Xi = E - TS - \mu N = -pV$ , de (34) y (35) obtenemos una relación universal entre energía, presión y volumen,

$$E = \frac{3}{2} pV. \quad (37)$$

Esta relación es universal en el sentido de que vale tanto para fermiones como para bosones, y para cualquier valor de las variables termodinámicas; pero ojo, no vale para cualquier sistema, sólo para un gas de partículas libres, que es lo que estamos estudiando acá. Por otra parte, (36) se puede reescribir en la forma

$$I_{3/2}^\pm(z) = \frac{\lambda^3}{g_s v}, \quad (38)$$

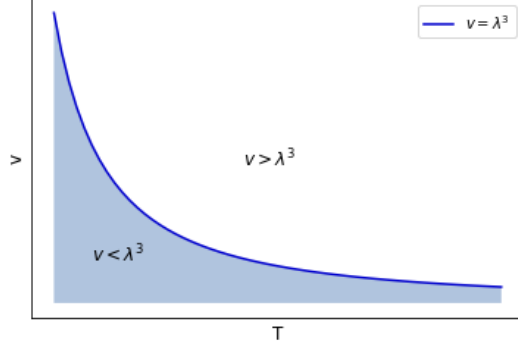
donde  $v = V/N$  es el volumen por partícula. Si  $v \gg \lambda^3$  tenemos  $I_{3/2}^\pm(z) \ll 1$ , lo cual, por la propiedad (i), implica  $z \ll 1$ . Usando la propiedad (iii) en (34) obtenemos entonces

$$\ln Z_{GC} \simeq g_s \frac{V}{\lambda^3} z \quad \text{para } v \gg \lambda^3. \quad (39)$$

¡Pero esto es justo la función de partición grancanónica del gas ideal, ecuación (26) de la resolución de los problemas 8-10 de la guía 3! Bueno, en realidad cuando resolvimos esos problemas lo hicimos implícitamente para partículas de spin 0, por eso no nos apareció el factor  $g_s$ ; si generalizamos ese análisis a spin



s recuperamos este factor. Así pues, el conteo de Boltzmann (en el que se basó esa resolución) es una buena aproximación cuando  $v \gg \lambda^3$ . Este régimen se puede interpretar de dos maneras: a temperatura fija corresponde a densidades bajas, mientras que a densidad fija corresponde a temperaturas altas. Es la región blanca (y alejada de la curva) de la siguiente figura.



En cambio, para  $v \lesssim \lambda^3$  (región sombreada de la figura) el conteo de Boltzmann no es una buena aproximación y hay que tratar la indistinguibilidad de las partículas exactamente. Este último es un régimen muy cuántico, en el que la separación típica entre partículas es menor o comparable a su longitud de onda de de Broglie, y por eso al tratamiento exacto de la indistinguibilidad se le llama *estadística cuántica*.

### 3 Fermiones

Consideremos un gas de fermiones a  $V$  y  $N$  fijos, y veamos qué ocurre a medida que variamos la temperatura. A temperaturas altas tenemos  $v \gg \lambda^3$ , así que ya sabemos que el gas se comporta como un gas ideal común; veamos cómo se comporta a temperaturas bajas (*régimen degenerado*). Escribiendo

$$f_\nu(z) = I_\nu^+(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x + 1}, \quad (40)$$

las ecuaciones (35) y (38) con el signo + toman la forma

$$E = \frac{3}{2} kT g_s \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \quad (41)$$

$$f_{3/2}(z) = \frac{\lambda^3}{g_s v}. \quad (42)$$

Las funciones  $f_\nu$  se conocen como las *integrales de Fermi* y, además de las tres propiedades que vimos en la sección anterior, tienen una cuarta propiedad que nos va a ser útil: para  $z \gg 1$  admiten la expansión

$$f_\nu(z) = \frac{(\ln z)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\nu(\nu-1)}{(\ln z)^2} + \mathcal{O}((\ln z)^{-4}) \right], \quad (43)$$

que se conoce como la *expansión de Sommerfeld*. Esta expansión está derivada en la sección 3.6.4 de las [notas de David Tong](#); no voy a reproducir esa cuenta acá porque es un poco larga. Para estudiar el comportamiento del gas a medida que variamos la temperatura manteniendo  $V$  y  $N$  fijos, lo primero que tenemos que hacer es calcular  $\mu(T)$  despejando  $\mu$  de (42); reemplazando el resultado en (41) obtendremos  $E(T)$ , y de ahí sacaremos  $p(T)$  usando (37). A temperaturas bajas el lado derecho de (42) se hace grande, de manera que  $f_{3/2}(z)$  también se hace grande y por lo tanto, dado que  $f_\nu$  es creciente, estamos en el régimen  $z \gg 1$ . Así pues, podemos usar la expansión de Sommerfeld (43). Reemplazándola en (42) y usando la definición de la fugacidad obtenemos

$$\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 + \mathcal{O}((kT/\mu)^4) \right] = \frac{1}{g_s v} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{3/2}, \quad (44)$$

donde hemos usado que  $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ , hemos reescrito  $\lambda$  en términos de  $\hbar = h/2\pi$  y hemos tachado dos factores  $kT$  que se cancelaban. Ahora, pasamos todos los factores del lado izquierdo menos  $\mu^{3/2}$  dividiendo al lado derecho, elevamos la ecuación a  $2/3$  y expandimos el lado derecho en potencias de  $(kT/\mu)^2$ . El resultado que obtenemos es

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{g_s v} \right)^{2/3} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 + \mathcal{O}((kT/\mu)^4) \right]. \quad (45)$$

A temperaturas bajas podemos escribir  $\mu = \epsilon_F + \mathcal{O}(T)$ , donde  $\epsilon_F \equiv \mu(0)$  es el potencial químico a temperatura 0 y se conoce como la *energía de Fermi*. Reemplazando esta expansión en el lado derecho de la ecuación de arriba obtenemos

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{g_s v} \right)^{2/3} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \mathcal{O}(T^3) \right]. \quad (46)$$

Evaluando a  $T = 0$  determinamos la energía de Fermi,

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{g_s v} \right)^{2/3}, \quad (47)$$

y usando este resultado podemos reescribir (46) en la forma

$$\mu = \epsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}(T^3) \right], \quad (48)$$

donde  $T_F = \epsilon_F/k$  es la *temperatura de Fermi*. Las dos últimas ecuaciones dan  $\mu$  en función de  $T$  a temperaturas bajas. Fíjense que el signo menos que aparece en la segunda está bien: la ecuación (42) nos dice que a medida que aumenta  $T$  disminuye  $z$ , y por lo tanto también  $\mu$ . Calculemos ahora  $E(T)$ . Reemplazando la expansión de Sommerfeld (43) en (41) obtenemos

$$E = \frac{3}{5} N \frac{\mu^{5/2}}{\epsilon_F^{3/2}} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 + \mathcal{O}((kT/\mu)^4) \right], \quad (49)$$

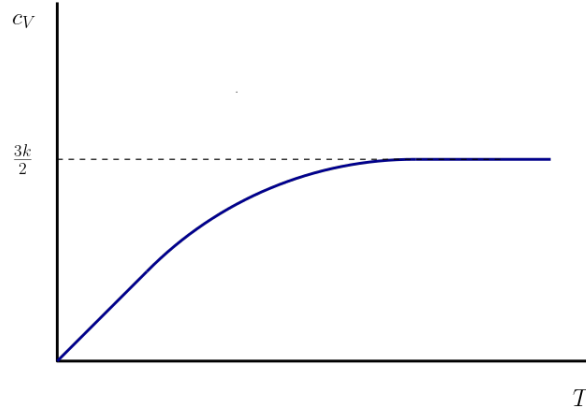
donde hemos usado (47), y reemplazando (48) en esta expansión obtenemos

$$E = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}(T^3) \right]. \quad (50)$$

Nótese que la energía no se anula a temperatura 0. Esto se debe al principio de exclusión de Pauli: dado que no puede haber dos partículas en el mismo estado, el estado fundamental del sistema no consiste en que todas las partículas estén en el estado fundamental de una partícula, y por lo tanto tiene energía no nula. Derivando este resultado obtenemos el calor específico a temperaturas bajas,

$$c_V = \frac{1}{N} \frac{\partial E}{\partial T} = k \frac{\pi^2}{2} \frac{T}{T_F} + \mathcal{O}(T^2). \quad (51)$$

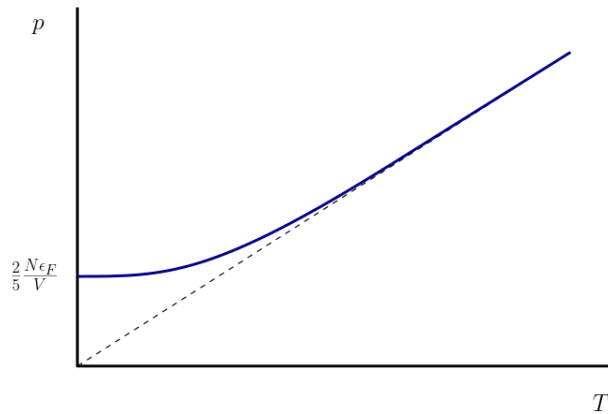
Dado que tenemos el calor específico a temperaturas altas y bajas (a temperaturas altas es el del gas ideal,  $c_V = 3k/2$ ), podemos representarlo cualitativamente a toda temperatura.



Este comportamiento se observa experimentalmente en el calor específico de los metales. El calor específico de un metal tiene dos contribuciones: la de la red cristalina y la de los electrones que se propagan libremente sobre ella. Los electrones forman un gas de fermiones libres, así que su contribución al calor específico debe tener la forma representada en la figura. Eso es efectivamente lo que se observa. Por último, reemplazando (50) en (37) obtenemos la presión a temperaturas bajas,

$$p = \frac{2}{5} \frac{N \epsilon_F}{V} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{T}{T_F} \right)^2 + \mathcal{O}(T^3) \right]. \quad (52)$$

De vuelta, dado que conocemos la presión a temperaturas altas y bajas (a temperaturas altas es la del gas ideal,  $p = NkT/V$ ), podemos representarla cualitativamente a toda temperatura.



Como vemos, la presión no se anula a temperatura 0. Esto también se puede entender intuitivamente: la presión se debe a los choques de las partículas del gas con las paredes del recipiente; en el caso clásico, a temperatura 0 todas las partículas tienen impulso 0 y por lo tanto el gas no hace presión, pero en el caso de un gas de fermiones eso está prohibido por el principio de exclusión de Pauli. A esta presión residual a temperatura 0 se la llama *presión de degeneración*, y es la responsable de que las enanas blancas se mantengan estables. Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio completamente ionizado, y es la presión de degeneración de los electrones libres lo que evita que la estrella colapse.

Nótese que, en el caso de un gas de fermiones, lo que marca la frontera entre las temperaturas altas y bajas es la temperatura de Fermi. Esta temperatura puede ser muy alta: por ejemplo, para los electrones en un metal  $T_F \sim 10^4$  K, y para los electrones en una enana blanca  $T_F \sim 10^7$  K. Por lo tanto, las temperaturas bajas a las que nos hemos referido en esta sección pueden estar muy por arriba de la temperatura ambiente. Lo que hemos visto en esta sección es básicamente la resolución del problema 4 de la guía 4.

### 3.1 Temperatura cero

Hay otra forma de entender los resultados que hemos obtenido a temperatura 0. Volvamos a la distribución de Fermi-Dirac, ecuación (23) con el signo +. A temperatura 0, el potencial químico que aparece en la ecuación es la energía de Fermi y, dado que  $\beta \rightarrow \infty$ , la distribución se convierte en un escalón,

$$n(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \epsilon < \epsilon_F \\ 0 & \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \quad (53)$$

(prescindimos del subíndice + en  $n_+(\epsilon)$  porque está claro que estamos hablando de fermiones). Este resultado no debe sorprendernos: a temperatura 0 el sistema se encuentra en el estado fundamental, y por lo tanto los fermiones se acomodan en los estados de energía más baja posible dentro de los límites impuestos por el principio de exclusión de Pauli. La ecuación (53) nos da una

nueva interpretación para la energía de Fermi: *la energía de Fermi es la mayor energía ocupada a temperatura 0*. También nos da una nueva prescripción para calcularla. En efecto, podemos escribir el número de partículas como la suma de los números de partículas en cada estado,

$$N = \sum_i n_i = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)n(\epsilon), \quad (54)$$

donde en el último paso hemos reescrito la suma sobre estados como una integral sobre energías usando la densidad de estados. Ahora, a temperatura 0 aplicamos (53) y, usando la expresión (28) para la densidad de estados, obtenemos

$$N = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon) = g_s \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \sqrt{\epsilon} = g_s \frac{4\pi V (2m\epsilon_F)^{3/2}}{3h^3}. \quad (55)$$

Despejando  $\epsilon_F$  y usando que  $h = 2\pi\hbar$  recuperamos el resultado que habíamos obtenido antes para la energía de Fermi, ecuación (47). Fíjense que, con nuestra nueva interpretación, es más fácil entender las características de este resultado: la energía de Fermi disminuye con  $g_s$  porque al aumentar  $g_s$  aumenta el número de estados en los que los fermiones se pueden acomodar sin incrementar su energía, y lo mismo pasa con  $V$ ; en cambio, la energía de Fermi aumenta con  $N$  porque si hay más partículas la máxima energía ocupada va a ser mayor. La energía del sistema a temperatura 0 también se puede calcular por este método,

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)n(\epsilon)\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon g(\epsilon)\epsilon = g_s \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^{3/2} \\ &= g_s \frac{4\pi V (2m\epsilon_F)^{3/2}}{5h^3} \epsilon_F = \frac{3}{5} N \epsilon_F \end{aligned} \quad (56)$$

(para entender el último paso, compárese el penúltimo miembro de esta ecuación con el último de (55)). Nótese que este resultado es consistente con (50). Por último, para sacar la presión de degeneración simplemente reemplazamos este resultado en (37). Haciendo eso se obtiene

$$p = \frac{2}{5} \frac{N \epsilon_F}{V}, \quad (57)$$

en concordancia con (52). Lo que hemos visto en esta subsección es la resolución del problema 5 de la guía 4.