El problema 7 de la Guía 2 y la distribución binomial

Física Teórica 3 - Primer Cuatrimestre de 2020

Juan Herrera Mateos[1] (jdh.1@msn.com)

Enunciado

Se lanzan diez dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres seis?

Aclaraciones previas

Suele haber varias maneras de pensar y resolver un problema. Ninguna es más correcta frente a otra: para algunas personas una forma es más natural e intuitiva que otra. En este caso vamos a resolver el problema por dos métodos (que parecen) diferentes (pero que en el fondo son equivalentes); el segundo nos permitirá avanzar un poco más y llegar a un resultado más general: la distribución binomial.

Resolución

Método 1: enumeración de los casos posibles

Llamamos suceso (o evento) elemental a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio que no se pueden descomponer en otros más simples. Dado un suceso A (conjunto de sucesos elementales) del espacio muestral Ω (conjunto completo de sucesos elementales), si cada uno de los eventos de Ω son equiprobables[2], la probabilidad de observar el suceso A está dada por:

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}, \tag{1}$$

donde $card()$ denota el cardinal de un conjunto o su número de elementos. Hacemos énfasis en que la fórmula anterior sólo puede usarse para un espacio equiprobable.

Los dados que se lanzan no están diferenciados entre sí; para nosotros es completamente equivalente lanzar diez dados que lanzar uno diez veces. El resultado de un lanzamiento será una tira ordenada de diez números del 1 al 6.

En nuestro caso $\Omega =$\{"secuencias que podemos formar con los 10 valores obtenidos"\} y $A =$\{"secuencias que tienen exactamente tres seis"\}.

Es claro que $card(\Omega) = 6^{10}$, pues cada uno de los diez lanzamientos de la secuencia puede tomar seis valores. ¿Cuántas tiras podemos formar con tres seis?. Imaginemos una secuencia como la representada en (2):

[1] La autoría está explícita por cualquier comentario y/o consulta que pueda surgir.

[2] Con frecuencia las características físicas de un experimento sugieren que podemos asignar probabilidades iguales a los distintos resultados. La frase "se elije al azar" sólo tiene sentido si los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

$$6 \quad 6 \quad 6 \quad V_1 \quad V_2 \quad V_3 \quad V_4 \quad V_5 \quad V_6 \quad V_7. \tag{2}$$

En ella cada V_i corresponde a un número distinto de seis. Suponiendo que cada $V_i = V$ es igual, en (2) podemos formar [3] $\frac{10!}{3!\,7!} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 5{,}3{,}8 = 120$ permutaciones, pues hay tres seis y siete V's repetidos. Ahora bien, como cada uno de los valores V_i en realidad puede tomar cinco valores, el número de secuencias que son útiles para nosotros es

$$card(A) = 5^7 \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Por lo tanto la probabilidad de obtener tres seis en una tirada de diez dados será

$$P(A) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} 5^7}{6^{10}} \approx 0{,}155 (= 15{,}5\,\%). \tag{4}$$

Método 2: un camino hacia la distribución binomial

Cuando lanzamos un dado la probabilidad de obtener un número a elección, por ejemplo un 6, es $p = 1/6$, y la probabilidad de obtener cualquier otro número es $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Si realizamos lanzamientos sucesivos, cada uno de ellos es independiente entre sí. Volvamos a la disposición que aparece en (2). ¿Cuál es la probabilidad de obtenerla? simplemente el producto la probabilidad de obtener tres veces un seis y siete veces otro valor, es decir

$$p^3 q^7 = p^3 (1-p)^7 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{5^7}{6^{10}} \tag{5}$$

Hay muchas configuraciones que son compatibles con el suceso "obtener exactamente tres seis". Para obtener su número debemos notar que aquí cualquier valor que no sea un seis es lo mismo. Nos preguntamos entonces por el número de permutaciones que podemos hacer en la disposición

$$6 \quad 6 \quad 6 \quad V \quad V \quad V \quad V \quad V \quad V \quad V, \tag{6}$$

donde V es "no seis". Unos párrafos arriba determinamos su número y vimos que era $\frac{10!}{3!\,7!} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = 5{,}3{,}8 = 120$, lo que esperábamos al comparar (4) y (5). Luego la probabilidad de obtener exactamente $n = 3$ seis en un lanzamiento de diez dados está dada por

$$P(n=3) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} 5^7}{6^{10}} \approx 0{,}155, \tag{7}$$

[3] El símbolo $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$ representa un número combinatorio (se corresponde con el coeficiente binomial a través del teorema del binomio) y en análisis combinatorio nos indica de cuántas formas podemos extraer un subconjunto de n elementos a partir de un conjunto de N.

consistentemente con (4).

La fórmula (7) nos permite hacer una generalización y obtener la distribución binomial.

La distribución binomial

Sea n la variable aleatoria[a] "número de veces que se obtiene un seis al lanzar N dados". La probabilidad de que la variable aleatoria n tome un valor dado es entonces:

$$P(n) = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} (p)^n \ (q)^{N-n} = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} (p)^n \ (1-p)^{N-n} = B\left(n|N,p\right) \tag{8}$$

Llegamos a que la variable aleatoria n obedece la llamada distribución binomial que que cuenta el número de éxitos en una secuencia de N experimentos de Bernoulli independientes entre sí con una probabilidad de éxito p. Un experimento de Bernoulli tiene sólo dos resultados posibles: el éxito o el fracaso que tiene probabilidad $q = 1 - p$. La fórmula (8) nos permite calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos.

[a]Una variable aleatoria X es una función $X : \Omega \to R$ que asigna un valor al resultado de un experimento aleatorio.

Salgamos ahora del problema 7 para hacer algunos comentarios más sobre la distribución binomial.

Digresión sobre la distribución binomial

Veamos un ejemplo de aplicación de (8). Supongan que tiramos cien monedas (o una moneda cien veces por falta de presupuesto). ¿Cuál es la probabilidad de obtener 50 caras?

Al lanzar una vez la moneda (ideal, no cargada), la probabilidad de obtener cara es $p = \frac{1}{2}$. Si n es la variable aleatoria "número de veces que se obtiene cara al lanzar N veces la moneda", la probabilidad de que se obtengan 50 caras después de 100 lanzamientos, estará dada a partir de (8), por:

$$B\left(n = 50|N = 100, p = \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{100-50} \approx 0{,}08$$

También podríamos preguntarnos por la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 40 y 45. Para determinarla debemos calcular la probabilidad de obtener exactamente l caras, con l entre 40 y 45, y sumarlas[4]:

$$P(40 \leq n \leq 45) = \sum_{n=40}^{45} B\left(n|N = 100, p = \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=40}^{45} \begin{pmatrix} 100 \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 0{,}165. \tag{9}$$

Ahora, si lanzamos la moneda las cien veces, ¿cuál es el valor esperado o valor medio del número de caras obtenidas, $< n >$? Intuitivamente esperamos que sea 50 porque la moneda no está cargada. Comprobémoslo

[4]La probabilidad de que ocurra el suceso A o el B es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Si ambos son mutuamente excluyentes, $P(A \cap B) = 0$. El caso de la distribución binomial se entiende de esta forma: si se realiza una serie de N experimentos de Bernoulli habrá una probabilidad de que k sean favorables. Si k experimentos son exitosos, entonces no pueden serlo $k'(\neq k)$.

calculando la esperanza de una distribución binomial general.

Esperanza de la distribución binomial

Suponiendo que n es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial $B(n|N,p)$, su esperanza (o momento de primer orden) estará dada por:

$$< n >= \sum_{n=0}^{N} n\, P(n) = \sum_{n=0}^{N} n \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} (p)^n \; (q)^{N-n} \tag{10}$$

$$< n >= \sum_{n=0}^{N} \underbrace{n \frac{N!}{n!\;(N-n)!}}_{\frac{N!}{(n-1)!\,(N-n)!}} (p)^n \; (1-p)^{N-n} = Np \sum_{n=0}^{N} \frac{(N-1)!}{(n-1)!\;(N-n)!} \; (p)^{n-1} \; (1-p)^{N-n}$$

$$< n >= Np \sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} N-1 \\ n-1 \end{pmatrix} (p)^{n-1} \; (1-p)^{N-1-(n-1)} = Np(p+1-p)^{N-1} = Np.$$

donde se ha utilizado el teorema del binomio[a] en la penúltima igualdad.
Sin embargo hay un procedimiento general y muy útil que nos permite reducir la suma a una forma más sencilla. Consideremos el problema matemático "puro" de calcular la suma que aparece en (10) tomando a p y a q como parámetros arbitrarios. Si notamos que $n\,p^n = p\,\frac{\partial}{\partial p}\,(p^n)$, se tiene

$$< n >= \sum_{n=0}^{N} n\, P(n) = \sum_{n=0}^{N} n \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} (p)^n \; (q)^{N-n} = \sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p \frac{\partial}{\partial p}\,(p^n) \; (1-p)^{N-n}$$

$$< n >= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} (p^n) \; (1-p)^{N-n} = p \frac{\partial}{\partial p}\,(p+q)^N = pN\,(p+q)^{N-1} \underbrace{=}_{p+q=1} pN$$

Llegamos entonces a que para la distribución binomial $B(n|N,p)$:

$$\boxed{<\text{n}>=\text{Np}} \tag{11}$$

[a] Teorema del binomio: $(x+y)^P = \sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} P \\ k \end{pmatrix} (p)^{P-k} \; (1-p)^k$.

Al aplicar la fórmula (11) verificamos inmediatamente que al lanzar los 100 dados tenemos una esperanza $< n >= \frac{N}{2} = 50$ para el número de caras resultantes.

Cuestiones para ustedes

Volviendo nuevamente al problema del lanzamiento de los diez dados. Traten de responder:

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener no más de tres seis?
- ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos ocho cincos? (*Ayuda: no hay que hacer ocho sumas*)

En otro orden:

- Derivar la fórmula que permite calcular la varianza y la dispersión estándar de la distribución binomial.
- Una moneda ideal es lanzada al aire 500 veces. Calcular la probabilidad de obtener 237 caras. *(Sugerencia: buscar "aproximación gaussiana de la distribución binomial.)*