Enanas Blancas y Límite de Chandrasekhar

Física Teórica 3 - Primer Cuatrimestre de 2020

Juan Herrera Mateos[1] (jdh.1@msn.com)

Aclaraciones previas

La evolución de una estrella depende principalmente de su masa. Mientras que **una estrella** de baja masa **como el sol** se encuentra en la secuencia principal del diagrama de Hertzsprung-Russell -que muestra temperatura efectiva de la estrella en función de la luminosidad-, ésta quema hidrógeno en helio en su núcleo. Luego de quemar todo el hidrógeno, quema material nuclear mas pesado como el helio. Las altas energías involucradas en estas reacciones generan una expansión, hasta que la estrella se convierte en una gigante roja. Luego de quemar todo el material disponible para la fusión se genera una inestabilidad, y expulsándose gran parte de la masa de la estrella. El núcleo estelar mantiene el calor residual y forma una **enana blanca: una estrella pequeña y caliente, de muy baja luminosidad, que agotó todo su material nuclear**.

Ahora bien, si en una enana blanca no se generan reacciones termonucleares, ¿qué es lo que mantiene a la estrella estable evitando el colapso gravitatorio? Lo veremos en la resolución del problema.

Enunciado (G4P10)

Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio (en su isótopo más estable, con dos neutrones) a una temperatura del orden de $10^7\,\mathrm{K}$ y una densidad de unos $10^{10}\,\mathrm{kg/m^3}$.

(a) Muestre que los átomos de helio deben encontrarse totalmente ionizados y que el gas de electrones resultante puede considerarse como un gas relativista a temperatura nula.

Datos: $k_B \approx 1{,}4\,10^{-23}\,\mathrm{J/K} \approx 8{,}6\,10^{-5}\,\mathrm{eV/K}$, $h \approx 6{,}6\,10^{-34}\,\mathrm{Js}$, masa del protón: $m_p \approx 1{,}7\,10^{-27}\,\mathrm{kg}$, masa del electrón: $m_e \approx 9{,}1\,10^{-31}\,\mathrm{kg}$, y energía de ionización completa del helio: $E_{ion} \sim 100\,\mathrm{eV} \sim 10^{-17}\,\mathrm{J}$.

(b) Asumiendo que la estrella es homogénea, se obtiene que su energía potencial gravitatoria es $E_p = -3GM^2/(5R)$, donde M y R denotan respectivamente la masa y el radio de la estrella. Calcule su energía cinética E_c, despreciando la contribución de los núcleos y aproximando la relación de dispersión de los electrones a primer orden en m_e^2, $\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} \approx pc + m_e^2c^3/2p$. Exprese E_c en función de M y R.

(c) En equilibrio, el radio de la estrella toma el valor que minimiza su energía. Muestre que existe una masa límite M_C tal que, para $M > M_C$, no hay ningún radio de equilibrio. Esa masa límite se conoce como el límite de Chandrasekhar. Calcule M_C y exprésela en unidades de la masa del sol, $M_\odot \approx 2{,}0\,10^{30}\,\mathrm{kg}$,sabiendo el valor de la masa de Planck $M_{Pl} \approx 2{,}2\,10^{-8}\,\mathrm{kg}$. ¿Qué le ocurre a la estrella cuando $M > M_C$?

(d) Muestre que no existiría una masa límite si el gas de electrones fuera no relativista.

[1] La autoría está explícita por cualquier comentario y/o consulta que pueda surgir.

Resolución

(a) Nuestro modelo inicial para una enana blanca consiste en una esfera de átomos de Helio 2 -con dos protones, 2 neutrones y dos electrones-, en estado gaseoso, de radio R y masa M, a una temperatura $T \sim 10^7\,\mathrm{K}$.

Lo primero que podemos hacer es ver en qué categoría se enmarca el sistema, clásica o cuántica, comparando la distancia de separación media entre partículas $l \sim n^{-1/3}$, donde n es la densidad de partículas, con la longitud de onda térmica de De Broglie dada por $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$: si $\lambda \ll l$ o lo que es lo mismo $\lambda^3 n \ll 1$, el gas puede tratarse de manera clásica; si no se cumple este criterio el gas debe estudiarse en el marco de la estadística cuántica.

Aquí:

* $m_{He} = 4m_e + 2m_p + 2m_n \approx 4m_p \approx 4 * 1{,}7\,10^{-27}\,\mathrm{kg} \approx 6{,}8\,10^{-27}\,\mathrm{kg}$, donde m_p es la masa del protón.
* $n_{He} = \frac{m}{\rho} = \frac{10^{10}\,\mathrm{kg/m^3}}{6{,}8\,10^{-27}\,\mathrm{kg}} \approx 1{,}5\,10^{36}\,\mathrm{m^{-3}}$, donde ρ es la densidad en la estrella.
* $\lambda_{He} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \approx \frac{6{,}6\,10^{-34}\,\mathrm{Js}}{\sqrt{2\pi * 6{,}8\,10^{-27} * 1{,}4\,10^{-16}\,\mathrm{J\,kg}}} \approx 2{,}7 * 10^{-13}\mathrm{m}$.

Entonces $\lambda_{He}^3 n_{He} \sim 10^{-2}$, lo que significa que podemos aplicar la estadística clásica para los átomos de helio. Como la energía típica es $k_B T \sim 1{,}4\,10^{-16}\mathrm{J} \sim 10^3\,\mathrm{eV} = 1\,\mathrm{keV}$, mucho mayor que la energía de ionización del helio, **los átomos de helio se encuentran ionizados y cada uno de ellos aporta dos electrones y cuatro nucleones.**

Debemos mostrar ahora que el gas de electrones resultantes de la ionización se comporta como un gas relativista a temperatura nula. Para verificar lo último hay que calcular la temperatura de Fermi que es la escala de temperatura asociada a la energía de Fermi. Ahora bien, la energía de Fermi depende de la relación de dispersión en particular de las partículas -i.e. $\varepsilon_s(\mathbf{p})$, donde s denota una eventual dependencia en el espín-. Un camino razonable en este punto es calcular el momento de Fermi, p_F, comprobar con el mismo que las partículas son relativistas, y después usar la relación de dispersión adecuada para calcular la energía de Fermi y concomitantemente, T_F.

Hay muchas maneras de hallar p_F. Una manera mecánica es partiendo desde el logarítmo de la función de partición gran canónica del gas de electrones, que aporta toda la información física relevante del sistema, y sumar sobre los posibles estados caracterizados por

$$ln\left(Z_{GC}\right) = \sum_s \sum_{\mathbf{p}} ln\left(1 + z\, exp\left(-\beta\, \varepsilon_s(\mathbf{p})\right)\right) = g_s \sum_{\mathbf{p}} ln\left(1 + z\, exp\left(-\beta\, \varepsilon(\mathbf{p})\right)\right), \tag{1}$$

donde en este caso, al no depender energía monoparticular del espín, la suma sobre éste arroja un factor de degeneración $g_s = 2(2s+1)$. La suma sobre $\mathbf{p}$ es sobre todos los posibles valores de momento. En el límite termodinámico podemos reemplazar $\sum_{\mathbf{p}} \to \int \frac{d\mathbf{q} d\mathbf{p}}{h^3}$, por lo que notando que aquí la relación de dispersión depende sólo del módulo del momento:

$$\begin{aligned} ln\left(Z_{GC}\right) &= g_s \frac{V}{h^3} \int ln\left(1 + z\, exp\left(-\beta\, \varepsilon(\mathbf{p})\right)\right)\, d\mathbf{p} \\ ln\left(Z_{GC}\right) &= g_s \frac{V}{h^3} 4\pi \int p^2\, ln\left(1 + z\, exp\left(-\beta\, \varepsilon(p)\right)\right)\, dp, \end{aligned} \tag{2}$$

donde hemos usado que la relación de dispersión por simetría depende sólo del módulo del momento para

integrar angularmente.

El número medio de electrones $< N >\equiv N$, está dado por la siguiente expresión:

$$N = z\left(\frac{\partial ln\left(Z_{GC}\right)}{\partial z}\right)_{\beta,V} = g_s\frac{V}{h^3}4\pi\int_0^\infty p^2\,\underbrace{\frac{1}{z^{-1}\,exp\left(\beta\,\varepsilon(p)\right)+1}}_{n_{FD}(p)}\,dp. \tag{3}$$

Inmediatamente identificamos la distribución de Fermi-Dirac. A temperatura nula los electrones se acomodan (respetando el principio de exclusión) de tal forma de minimizar la energía. La energía de Fermi es la energía del máximo nivel ocupado. El momento de Fermi en consonancia, contiene los estados ocupados en el espacio de momento, con $p \leq p_F$. Para calcularlo hay que notar que la distribución de Fermi-Dirac es a $T = 0\,\mathrm{K}$ una función escalón de Heaviside[2], $\theta(p_F - p)$, así:

$$\begin{aligned} N &= g_s\frac{V}{h^3}4\pi\int_0^\infty p^2\theta(p_F-p)\,dp = g_s\frac{V}{h^3}4\pi\int_0^{p_F} p^2\,dp \Rightarrow \\ p_F &= \left(\frac{3h^3}{4\pi g_s}\frac{N}{V}\right)^{1/3} = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3}\hbar, \end{aligned} \tag{4}$$

donde n es la densidad numérica de electrones. Como:

* $M = Nm_e + \frac{N}{2}2m_p + \frac{N}{2}2m_n \approx 2Nm_p$.
* $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow$
* $n = \frac{N}{V} = \frac{M/2m_p}{M/\rho} = \frac{\rho}{2m_p} \approx \frac{10^{10}\,\mathrm{kg/m^3}}{1{,}7\,10^{-27}\,\mathrm{kg}} \approx 3\,10^{36}\,\mathrm{m^{-3}}$.

Reemplazando los datos del problema, resulta:

$$p_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3}\hbar = \left(3\pi^2 * 3\,10^{36}\,\mathrm{m^{-3}}\right)^{1/3}\hbar \approx 4{,}7\,10^{-22}\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}. \tag{5}$$

La transición entre la situación no relativista y relativista ocurrirá cuando $\varepsilon_0 \sim pc$, donde $\varepsilon_0 = m_e c^2$ es la energía en reposo. Un momento representativo del sistema es el momento de Fermi que acabamos de calcular. Comparando éste último con la energía en reposo:

$$\begin{aligned} m_e c^2 &\approx 8{,}2\,10^{-14}\mathrm{J} \\ p_F c &\approx 1{,}4\,10^{-13}\mathrm{J} \\ \frac{m_e c^2}{p_F c} &\approx 0{,}6 \qquad (6) \\ p_F c &\sim m_e c^2, \qquad (7) \end{aligned}$$

vemos que el gas de electrones es relativista (pero no ultrarelativista).

Ahora podemos usar la relación de dispersión relativista. Al reemplazar el valor hallado para el momento de Fermi, resulta:

$$\varepsilon_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4} \approx 1{,}6\,10^{-13}\mathrm{J}. \tag{8}$$

[2]Recordar que la función de Heaviside está definida por: $x\epsilon\mathbb{R} \mapsto \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

En consecuencia la temperatura de Fermi es:

$$T_F = \varepsilon_F / k_B \sim 10^{10}\,\mathrm{K}.$$

Nos percatamos de que la misma es mucho mayor que la temperatura del sistema $T \sim 10^7\,\mathrm{K}$, por lo que **podemos trabajar en el régimen ultra-degenerado, lo que significa, operativamente, que la temperatura es en muy buena aproximación nula y la distribución de Fermi-Dirac se aproxima mediante la función escalón de Heaviside**.

Si hubiesemos tomado una aproximación más burda para la energía de Fermi de este gas de electrones, sin tener en cuenta efectos relativistas, es decir con una relación de dispersión $\varepsilon = \frac{p^2}{2m_e}$, habríamos obtenido una temperatura del mismo orden.

Queda como ejercicio para Uds. determinar que los núcleos del helio ionizado se comportan de manera no relativista.

(b) La energía potencial gravitatoria está dominada principalmente por núcleos provenientes de la ionización. Asumiendo que la densidad de masa, ρ, es aproximadamente constante en el interior de la estrella de radio R y masa total $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, la energía potencial está dada por:

$$E_g = -G\int_0^\infty \frac{M(r)}{r} dM(r) = -G\int_0^R \frac{1}{r} \underbrace{M\frac{r^3}{R^3}}_{M(r)} \underbrace{2M\frac{r^2}{R^3}dr}_{dM(r)}$$

$$E_g = -3\frac{GM^2}{R^6}\frac{R^5}{5} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}. \tag{9}$$

Lo que mantiene a la estrella estable evitando el colapso gravitatorio es la "presión de Fermi". Ya vimos la densidad de la materia es tan grande que el gas de electrones puede considerarse ultra-degenerado. En un gas clásico a temperatura cero, todas las partículas tienen momento nulo; pero en el caso de un gas de fermiones esto no es posible debido al principio de exclusión de Pauli. La presión que tiene el gas a temperatura nula se denomina **presión de degeneración y es aquí lo suficiente grande para contrarrestar la fuerza de gravedad. Directamente vinculada con la presión está la energía cinética media.**

Debido a la diferencia de masa, la energía cinética de los protones y neutrones es pequeña en comparación con la energía cinética media del gas de electrones, por lo que sólo nos restringiremos a éstos últimos. Para obtener el valor medio de la energía cinética del gas de electrones, podemos operar de distintas maneras que terminan siendo equivalentes. Una es derivando el logaritmo la función de partición gran canónica respecto a β; pero otra forma es percatándonos de que, cualquier valor medio puede obtenerse sumando la cantidad de interés pesada por la distribución y por la degeneración que correspondan. Así, operando en momento lineal, como hicimos antes, tenemos[3]:

[3]Recordar que para nosotros la temperatura es prácticamente nula.

$$E_c = \int_0^\infty \underbrace{\varepsilon(p)}_{Cant.\,de\,interés} \underbrace{g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2}_{g(p)} \underbrace{\frac{1}{z^{-1}\, exp\left(\beta\, \varepsilon(p)\right) + 1}}_{n_{FD}(p)}\, dp, \tag{10}$$

$$E_c = \int_0^\infty \varepsilon(p) g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 \underbrace{\theta(p_F - p)}_{"T=0K"}\, dp, \tag{11}$$

$$E_c = \int_0^{p_F} \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}\, g_s \frac{V}{h^3} 4\pi p^2\, dp. \tag{12}$$

El enunciado nos sugiere aproximar la relación de dispersión dispersión al primer orden, i.e.: $\sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} = p^2c^2\sqrt{1 + \frac{m_e^2c^4}{p^2c^2}} \approx pc + m_e^2c^3/2p$. En realidad esta aproximación es algo cruda aún para valores de impulso comparable con el de Fermi, como muestra la ecuación (6), pero en este caso no estamos interesados en un cálculo tan refinado. Con la sustitución sugerida, queda:

$$E_c = \underbrace{g_s}_{2} \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^{p_F} \left(pc + m_e^2c^3/2p\right) p^2\, dp \tag{13}$$

$$E_c = \frac{V}{\hbar^3\pi^2} \frac{c}{4} \left(p_F^4 + m_e^2c^2p_F^2\right) \tag{14}$$

Pero según (4), $p_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \hbar$. Luego, siendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

$$E_c = \frac{3}{4} \frac{V}{3\pi^2} c\hbar \left[\left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{4/3} + \frac{m_e^2c^3}{\hbar^2} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3}\right] \tag{15}$$

$$E_c = \frac{3c\hbar}{4} \left(3\pi^2\right)^{1/3} \frac{(M/2m_p)^{4/3}}{V^{1/3}} + \frac{3}{4} \left(3\pi^2\right)^{-1/3} \frac{m_e^2c^3}{\hbar} (M/2m_p)^{2/3} V^{1/3} \tag{16}$$

$$E_c = \frac{3}{4} \left(\frac{9}{4}\pi\right)^{1/3} c\hbar \frac{(M/2m_p)^{4/3}}{R} + \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3} \frac{m_e^2c^3}{\hbar} (M/2m_p)^{2/3} R^{1/3} \tag{17}$$

$$E_c \equiv A\, \frac{(M/2m_p)^{4/3}}{R} + B\, (M/2m_p)^{2/3} R^{1/3}. \tag{18}$$

(c) La energía total del sistema puede escribirse entonces según:

$$E_c + E_g = A\, \frac{(M/2m_p)^{4/3}}{R} + B\, (M/2m_p)^{2/3} R^{1/3} - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Notamos que hay dos términos que van como la inversa del radio de la estrella. Para que esta expresión tenga un mínimo, R_*, el término con esta dependencia debe ser globalmente positivo; si fuera negativo, la energía decrecería monótonamente con el radio estelar. Existe entonces un valor crítico para la masa, llamado masa de Chandrasekhar, que hace que la estrella colapse o no, y está dado por:

$$A(M_c/2m_p)^{4/3} = \frac{3}{5}GM_c^2 \Rightarrow M_C = \left(\frac{5}{3G}A\right)^{3/2}(\frac{1}{2m_p})^2 \tag{19}$$

$$M_C = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{3} * \frac{3}{4}\left(\frac{9}{4}\pi\right)^{1/3}\right)^{3/2}\left(\frac{\hbar c}{Gm_p^2}\right)^{3/2} m_p \tag{20}$$

$$M_C = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}\pi^{1/2}\left(\frac{\hbar c}{Gm_p^2}\right)^{3/2} m_p = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}\pi^{1/2}\left(\frac{M_{Planck}^2}{m_p^2}\right)^{3/2} m_p \tag{21}$$

donde se identificó la masa de Planck $M_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2{,}2\,10^{-8}\,\text{kg}$. Reemplazando valores se llega a que, en términos de la masa solar $M_\odot \sim 2{,}0\,10^{30}\,\text{kg}$:

$$M_C \approx \frac{3}{8}\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}\pi^{1/2} * 3{,}68\,10^{30} kg \approx 1{,}5\,M_\odot. \tag{22}$$

Un cálculo más realista, teniendo en cuenta que la densidad real no es uniforme y otros efectos, da como valor $M_C = 1{,}4\,M_\odot$.

Si una estrella excede el límite dado por la masa de Chandrasekhar, la estrella en cuestión no puede convertirse en una enana blanca cuando se agota su combustible nuclear, sino que debe continuar colapsándose. ¿Cuál es el destino final de una estrella así? Más allá de este límite la presión de degeneración no es capaz de contrarrestar la fuerza de gravedad en el remanente estelar y se produciéndose un colapso que da origen a una **estrella de neutrones**.[4] **o un agujero negro**. Existe también, al menos en teoría, un tercer posible resultado de este colapso, que daría lo que se conoce como a una estrella de quarks, pero esto último no está contrastado.

(d) Si el gas de electrones fuera no relativista, $\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2m_e}$, por lo que la energía cinética media estaría dada según

$$E_c \underbrace{=}_{\text{"}T=0\text{K"}} 8\pi\frac{V}{h^3}\int_0^{p_F}\frac{p^2}{2m_e}p^2\,dp = \frac{4\pi}{5}\frac{V}{h^3}p_F^5 \sim cte\,\frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} \sim cte'\,\frac{M^{5/3}}{R^2}. \tag{23}$$

La energía total resulta entonces:

$$E_c + E_g \equiv C\frac{M^{5/3}}{R^2} - D\frac{M^2}{R}, \tag{24}$$

donde C y D son dos constantes positivas. La ecuación anterior, independientemente de los valores de las constantes, siempre puede minimizarse pudiendo obtenerse de ella un radio asociado R_* a la estabilidad de la estrella. No existe en este caso una masa crítica sobre la cual la presión de degeneración no pueda contener la atracción gravitatoria.

¡Les dejamos como ejercicios determinar el valor numérico para el radio estable de esta enana blanca!

[4]Para las estrellas de neutrones son los neutrones quienes están degenerados. También existe un límite a la masa que éstas pueden soportar. y es del orden de tres masas solares Este es el límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.