

Modelo de Ising

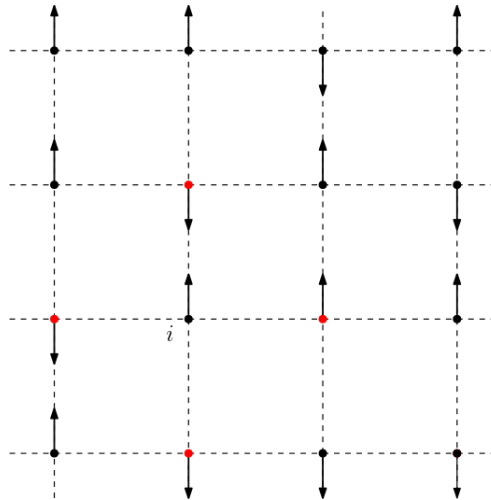
Guillem Pérez Nadal

Prefacio

Estas notas son un repaso de los contenidos necesarios para resolver los problemas de la guía 6, e incluyen la resolución de los problemas 1, 3, 6 y 7. Para más información, recomiendo como siempre consultar las notas de David Tong sobre el tema, que en este caso son especialmente interesantes y pueden encontrar [acá](#).

1 El modelo

El modelo de Ising es una red de spines que pueden apuntar hacia arriba o hacia abajo. La red puede tener cualquier número de dimensiones y puede ser de cualquier tipo (cuadrada, hexagonal, etc). En el caso de una red cuadrada en dos dimensiones, un estado genérico sería como se muestra en la figura.



Si el spine situado en el sitio i de la red apunta hacia arriba, decimos que su estado es $s_i = +1$, y si apunta hacia abajo es $s_i = -1$. El sistema está sometido a un campo magnético de magnitud B que apunta hacia arriba. Eligiendo unidades

de manera que el momento magnético de los spines es 1, el hamiltoniano es

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_i s_i, \quad (1)$$

donde $J \geq 0$ es una constante y la primera suma es sobre pares de primeros vecinos. Los primeros vecinos de un sitio i de la red son los sitios que están más cerca de éste; en la figura, son los cuatro sitios marcados en rojo. La suma sobre pares de primeros vecinos se puede escribir más explícitamente como

$$\sum_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in V_i}, \quad (2)$$

donde V_i es el conjunto de primeros vecinos del sitio i y el factor $1/2$ está para no contar cada par dos veces. El segundo término del hamiltoniano (1) es la típica interacción de un sistema de spines con un campo magnético. En cambio, el primer término es nuevo: es un término de interacción entre distintas partículas, algo que no nos habíamos encontrado antes en esta materia. Dado que $s_i s_j$ es $+1$ si los dos spines apuntan hacia el mismo lado y -1 si apuntan en direcciones distintas, el término de interacción se minimiza si todos los spines apuntan hacia el mismo lado. En otras palabras, en este sistema los spines tienen tendencia a apuntar todos en la misma dirección, y por esa razón el modelo de Ising es un modelo microscópico de un imán. La función de partición canónica es

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta H(\{s_i\})} = \sum_{\{s_i\}} e^{K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + b \sum_i s_i}, \quad (3)$$

donde $K = \beta J$ y $b = \beta B$, y la suma es sobre todos los posibles estados de todos los spines (hemos omitido el subíndice C de la función de partición porque vamos a trabajar todo el tiempo en el ensamble canónico). Un observable que podemos derivar de Z y nos va a interesar es la magnetización,

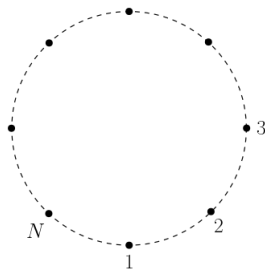
$$m = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle = \frac{1}{NZ} \sum_{\{s_i\}} \left(\sum_i s_i \right) e^{K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + b \sum_i s_i} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial b} \ln Z. \quad (4)$$

Nótese que, en el límite termodinámico, en el que el sistema se hace infinito, todos los spines son equivalentes entre sí y por lo tanto $\langle s_i \rangle$ es independiente de i , de manera que también podemos escribir $m = \langle s_i \rangle$. Debido a la interacción entre partículas, la función de partición (3) no factoriza, así que es más difícil de calcular que todas las que hemos visto hasta ahora. De hecho, sólo se sabe calcular exactamente en dimensiones 1 y 2, y en el último caso sólo para $B = 0$. Nosotros vamos a aprender a calcularla en dimensión 1; la cuenta en dimensión 2 es la famosa *solución de Onsager*, que pueden encontrar en la sección 12.3 del Pathria (ver también algunos resultados parciales exactos, que son muy lindos, en la sección 5.3 de las [notas de David Tong](#)). Desgraciadamente, el caso unidimensional es el menos interesante de todos porque no ocurre nada especial, mientras que en dimensión mayor hay una transición de fase ferromagnética: por

debajo de una cierta temperatura, el sistema se magnetiza espontáneamente sin necesidad de que haya un campo magnético. Para poder ver eso, vamos a presentar también un método aproximado para calcular la función de partición que vale en cualquier dimensión (y de hecho funciona mejor cuanto mayor sea la dimensión), que es la *aproximación de campo medio*. Por último, uno siempre puede recurrir a la computadora para tratar de calcular la función de partición, y eso es lo que vamos a hacer en la práctica computacional.

2 Modelo de Ising en una dimensión

En una dimensión, la red de Ising se convierte en una cadena. La cadena puede ser abierta o cerrada, y vamos a estudiar las dos posibilidades por separado. Empezamos con el caso cerrado (problema 1 de la guía 6), que representamos en la siguiente figura.



Nótese que, en esta cadena, todos los espines son equivalentes entre sí incluso sin tomar el límite termodinámico. El hamiltoniano de Ising en este caso es

$$H = -J \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} - B \sum_{i=1}^N s_i, \quad (5)$$

donde hemos definido $s_{N+1} \equiv s_1$ (fíjense que este spin aparece en el último término de la primera suma). Usando esta identificación podemos escribir

$$\sum_{i=1}^N s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_i + s_{i+1}), \quad (6)$$

de manera que

$$H = - \sum_{i=1}^N \left[J s_i s_{i+1} + \frac{B}{2} (s_i + s_{i+1}) \right]. \quad (7)$$

Esta forma de escribir el hamiltoniano es conveniente por razones que vamos a

discutir más adelante. La función de partición es

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1, \dots, s_N} e^{\sum_{i=1}^N [K s_i s_{i+1} + \frac{b}{2}(s_i + s_{i+1})]} = \sum_{s_1, \dots, s_N} \prod_{i=1}^N e^{K s_i s_{i+1} + \frac{b}{2}(s_i + s_{i+1})} \\ &= \sum_{s_1, \dots, s_N} \prod_{i=1}^N q_{s_i s_{i+1}} = \sum_{s_1, \dots, s_N} q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \cdots q_{s_N s_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde en el paso de la primera línea a la segunda hemos definido

$$q_{ss'} = e^{K s s' + \frac{b}{2}(s + s')}. \quad (9)$$

Ahora, fíjense que podemos pensar en esta cantidad como el elemento de la fila s y columna s' de una matriz q ; a esta matriz se la conoce como la *matriz de transferencia*. Si declaramos que la primera fila/columna es la 1 y la segunda la -1 , la matriz de transferencia es

$$q = \begin{pmatrix} e^{K+b} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-b} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Haber introducido la matriz de transferencia nos ayuda a interpretar mejor la estructura de la función de partición: lo que tenemos en el último miembro de (8) es un producto de matrices o, más precisamente, una potencia de la matriz q . En efecto, recordemos cómo se escribe la n -ésima potencia de una matriz A ,

$$(A^n)_{ij} = \sum_{k_2, \dots, k_n} A_{ik_2} A_{k_2 k_3} \cdots A_{k_n j}. \quad (11)$$

Comparando con (8) vemos que

$$Z = \sum_{s_1} \sum_{s_2, \dots, s_N} q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \cdots q_{s_N s_1} = \sum_{s_1} (q^N)_{s_1 s_1} = \text{Tr}(q^N). \quad (12)$$

Ahora, la traza es independiente de la base, así que la podemos calcular en la base que queramos. En una base de autovectores de q tenemos simplemente

$$q^N = \begin{pmatrix} \lambda_+^N & 0 \\ 0 & \lambda_-^N \end{pmatrix}, \quad (13)$$

donde λ_{\pm} son los autovalores de q , y por lo tanto

$$Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N. \quad (14)$$

Sólo nos falta, pues, calcular los autovalores de q . Eso ya es tarea fácil: simplemente hay que resolver la ecuación característica

$$0 = \det(q - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} e^{K+b} - \lambda & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-b} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda e^K \cosh b + 2 \sinh(2K). \quad (15)$$

Ésta es una ecuación de segundo grado para λ que resolvemos fácilmente,

$$\begin{aligned}\lambda &= e^K \cosh b \pm \sqrt{e^{2K} \cosh^2 b - 2 \sinh(2K)} \\ &= e^K \left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}} \right) \equiv \lambda_{\pm},\end{aligned}\quad (16)$$

donde en el paso de la primera línea a la segunda hemos usado que $\cosh^2 b - \sinh^2 b = 1$. Y ya está, esta ecuación junto con (14) nos da la función de partición de la cadena de Ising cerrada. Pueden chequear este resultado poniendo $K = 0$ y comparando con lo que se obtiene haciendo la cuenta desde el principio en ese caso (lo cual es fácil porque la función de partición factoriza). Nótese que, como $\lambda_- < \lambda_+$, en el límite termodinámico el segundo término de (14) es despreciable frente al primero, así que podemos escribir

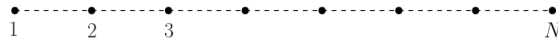
$$Z = \lambda_+^N. \quad (17)$$

Aplicando la ecuación (4) obtenemos la magnetización,

$$m = \frac{\partial}{\partial b} \ln \lambda_+ = \frac{\sinh b}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}}. \quad (18)$$

Como vemos, la magnetización aumenta con K , porque al aumentar esta cantidad disminuye el denominador en el lado derecho de esta ecuación. Así es como debe ser, porque al aumentar K se acentúa la tendencia de los spines a apuntar hacia el mismo lado. Nótese, sin embargo, que el efecto de la interacción no es suficiente para que haya magnetización espontánea: la magnetización se anula para $b = 0$, es decir, cuando no hay campo magnético, así que el sistema nunca se comporta como un ferromagneto (a no ser que la temperatura sea cero, en cuyo caso podemos tener $B = 0$ y $b \neq 0$). Ésta es una conclusión decepcionante que no se repite en dimensión mayor, tal como hemos mencionado más arriba. Por último, discutamos por qué nos convenía escribir el hamiltoniano en la forma (7): gracias a haber hecho eso, la matriz de transferencia nos ha quedado simétrica, $q_{ss'} = q_{s's}$ (ver la ecuación (9)), cosa que no habría ocurrido si hubiéramos trabajado con la expresión original para el hamiltoniano, ecuación (5). El hecho de que q sea simétrica es una ventaja porque nos asegura que la podemos diagonalizar, y que lo podemos hacer con una base ortonormal. En realidad, en este caso podríamos haber trabajado con una matriz de transferencia no simétrica y no habría pasado nada grave, pero en casos más generales la simetría de q es realmente una ventaja importante.

Vamos ahora con la cadena abierta, que representamos en la siguiente figura.



La diferencia con la cadena cerrada es que, en este caso, el primer spin no interactúa con el último porque no son primeros vecinos. El hamiltoniano es, pues, igual que antes pero sin el término de interacción entre esos dos spines,

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} - B \sum_{i=1}^N s_i. \quad (19)$$

La función de partición en este caso también se puede calcular por el método de la matriz de transferencia, pero es más difícil que en el caso cerrado porque ahora Z ya no se puede escribir como una traza (ver la resolución del problema 2 de la guía 6). Sin embargo, en el caso particular $B = 0$ hay otro método, completamente distinto, que sí es sencillo (problema 3 de la guía 6), y eso es lo que vamos a ver aquí. La función de partición de N spines en ausencia de campo magnético es

$$Z_N = \sum_{s_1, \dots, s_N} \prod_{i=1}^{N-1} e^{K s_i s_{i+1}}. \quad (20)$$

Como s_N sólo aparece en el último factor de esta productoria, podemos escribir

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{s_1, \dots, s_N} \left(\prod_{i=1}^{N-2} e^{K s_i s_{i+1}} \right) e^{K s_{N-1} s_N} \\ &= \sum_{s_1, \dots, s_{N-1}} \left(\prod_{i=1}^{N-2} e^{K s_i s_{i+1}} \right) \sum_{s_N} e^{K s_{N-1} s_N}. \end{aligned} \quad (21)$$

La suma sobre s_N es muy fácil porque tiene sólo dos términos,

$$\sum_{s_N} e^{K s_{N-1} s_N} = e^{K s_{N-1}} + e^{-K s_{N-1}} = 2 \cosh(K s_{N-1}) = 2 \cosh K, \quad (22)$$

donde en el último paso hemos usado que $s_{N-1} = \pm 1$ y que el coseno hiperbólico es par. Reemplazando este resultado en (21) y comparando con (20) obtenemos una relación de recurrencia para la función de partición,

$$Z_N = 2 \cosh K \sum_{s_1, \dots, s_{N-1}} \prod_{i=1}^{N-2} e^{K s_i s_{i+1}} = 2 \cosh K Z_{N-1}. \quad (23)$$

Ahora, podemos usar esta misma relación para expresar Z_{N-1} en términos de Z_{N-2} , y Z_{N-2} en términos de Z_{N-3} , y así sucesivamente, así que tenemos

$$Z_N = (2 \cosh K)^{N-1} Z_1. \quad (24)$$

Nótese que cada vez que aplicamos la relación de recurrencia aparece un factor $2 \cosh K$ y baja en 1 el número de partículas, con lo cual la suma del número de partículas que nos quedan más el número de factores $2 \cosh K$ siempre es igual a N , de ahí el exponente que aparece en esta ecuación. Ahora, si la cadena tiene sólo un spin su hamiltoniano se anula, porque en ese caso el hamiltoniano (19) sin campo magnético no tiene ningún término, y por lo tanto

$$Z_1 = e^0 + e^0 = 2. \quad (25)$$

Reemplazando en (24) llegamos finalmente al resultado

$$Z_N = 2^N (\cosh K)^{N-1}. \quad (26)$$

Pueden comprobar ustedes mismos que, en el límite termodinámico, este resultado coincide con el de la cadena cerrada con $B = 0$. Claro, no podía ser de otra manera: la única diferencia entre ambas cadenas está en la interacción entre el primer spin y el último, y esa interacción no puede tener ninguna relevancia cuando el número de spines es muy grande. Por último, el método de la relación de recurrencia sólo funciona para la cadena abierta y no para la cerrada. En efecto, para poder llegar a la relación de recurrencia (23) ha sido crucial que la suma sobre s_N , ecuación (22), fuera constante (independiente del estado), porque gracias a eso la hemos podido sacar como un factor global afuera de la suma sobre los demás spines y reconocer en esta última la función de partición con una partícula menos. En el caso de la cadena cerrada, s_N no interactúa sólo con s_{N-1} sino también con s_1 , y eso hace que la suma sobre ese spin no sea constante y por lo tanto no se pueda sacar afuera de la suma sobre los demás spines, frustrando la relación de recurrencia. ¡Compruébenlo ustedes mismos!

3 Aproximación de campo medio

Consideremos una red de Ising cualquiera, y sea γ el número de primeros vecinos de cada sitio (por ejemplo, para una red unidimensional $\gamma = 2$, y para una red bidimensional cuadrada $\gamma = 4$). Concentrémonos en algún spin de la red; si su estado es s y el de sus primeros vecinos es s_1, \dots, s_γ , la parte del hamiltoniano (1) que involucra a ese spin es

$$H_1 = -Js \sum_{i=1}^{\gamma} s_i - Bs = -Js \sum_{i=1}^{\gamma} (s_i - m) - (J\gamma m + B)s, \quad (27)$$

donde en la segunda igualdad simplemente hemos restado y sumado la magnetización $m = \langle s_i \rangle$. La *aproximación de campo medio* (problemas 6 y 7 de la guía 6) consiste en despreciar el primer término del lado derecho de esta ecuación,

$$H_1 \simeq -(J\gamma m + B)s, \quad (28)$$

de manera que la interacción con los primeros vecinos queda reemplazada por una interacción con el valor medio del spin, de ahí el nombre de la aproximación. Dado que ya no hay interacción entre el spin seleccionado y el resto de la red, ambos subsistemas se vuelven independientes y podemos estudiar a nuestro spin por separado. Su función de partición es

$$Z_1 = \sum_{s=\pm 1} e^{\beta(J\gamma m + B)s} = 2 \cosh[\beta(J\gamma m + B)], \quad (29)$$

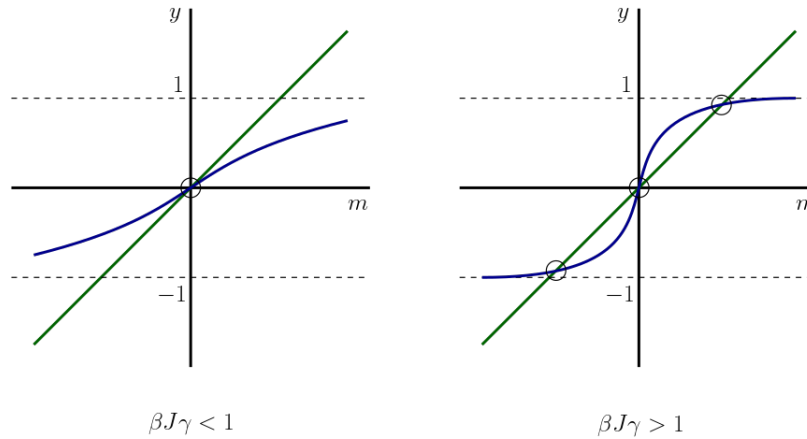
de donde obtenemos su valor medio,

$$\langle s \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z_1 = \tanh[\beta(J\gamma m + B)]. \quad (30)$$

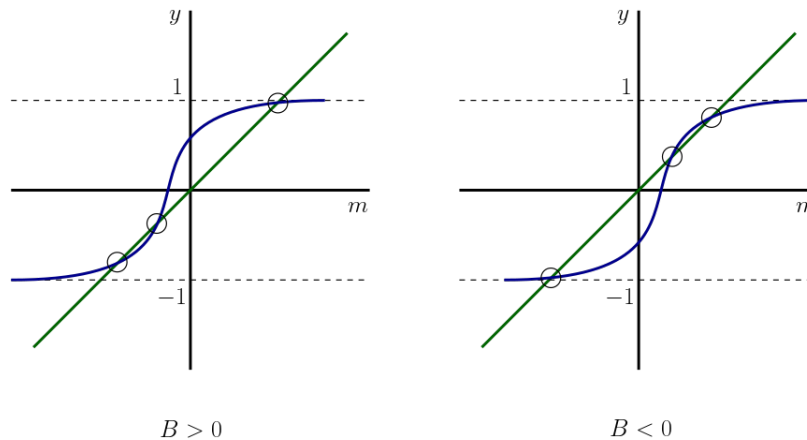
Ahora, el valor medio de nuestro spin tiene que ser el mismo que el de los demás, $\langle s \rangle = m$. Eso nos lleva a la *ecuación de autoconsistencia* para la magnetización,

$$m = \tanh[\beta(J\gamma m + B)]. \quad (31)$$

Ésta es una ecuación trascendente que no sabemos resolver analíticamente, pero sí lo podemos hacer gráficamente: las soluciones son los valores de m para los que la recta $y = m$ se cruza con la curva $y = \tanh[\beta(J\gamma m + B)]$. En la siguiente figura representamos ambas curvas en el caso $B = 0$, que es el que más nos interesa, y señalamos los puntos donde se cruzan.



Para entender por qué el primer gráfico corresponde a $\beta J \gamma < 1$ y el segundo a $\beta J \gamma > 1$, basta con notar que la pendiente de la curva $y(m) = \tanh(\beta J \gamma m)$ en el origen es $y'(0) = \beta J \gamma$, y por lo tanto es menor que la de la recta en el primer caso y mayor en el segundo. En el primer régimen tenemos una única solución, $m = 0$, pero en el segundo tenemos tres; ¿cuál de esas tres es la buena? Para verlo, preñamos el campo magnético. Si $B > 0$ la curva azul se desplaza hacia la izquierda (porque pasa a tener el cero en un valor negativo de m), y si $B < 0$ se desplaza hacia la derecha, tal como mostramos en la siguiente figura.



Dado que los spines tienden a alinearse con el campo magnético, en el caso $B > 0$ la magnetización tiene que ser positiva, así que sólo hay una solución

válida, la mayor de todas (porque es la única positiva de las tres); por razones análogas, en el caso $B < 0$ la única solución válida es la menor de todas. Por lo tanto, de las tres soluciones que veíamos en el panel derecho del gráfico anterior, las buenas son la más grande y la más chica; la primera es la que observaremos cuando nos acerquemos a $B = 0$ por arriba, y la segunda la que veremos cuando nos acerquemos por abajo. En resumen, pues, en ausencia de campo magnético la magnetización es nula para $\beta J\gamma < 1$ y no nula para $\beta J\gamma > 1$. Estos dos regímenes corresponden respectivamente a $T > T_c$ y $T < T_c$, donde

$$T_c = \frac{J\gamma}{k} \quad (32)$$

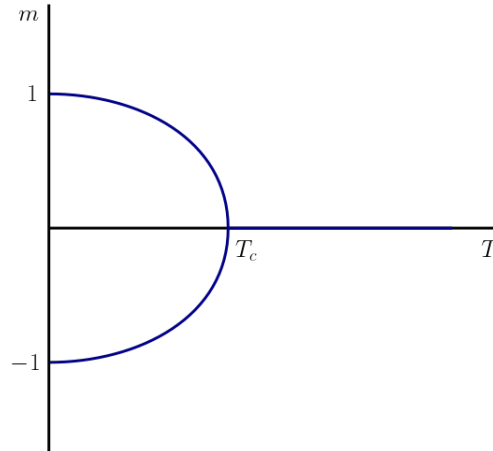
es la *temperatura crítica* del sistema. Así, a temperaturas inferiores a la crítica el sistema se magnetiza espontáneamente, es decir, se comporta verdaderamente como un imán. Para hacer un buen gráfico de la magnetización en función de la temperatura en ausencia de campo magnético, conviene que estudiemos cómo se comporta m cuando nos acercamos a la temperatura crítica por abajo. Teniendo en cuenta que $|m| \ll 1$ para $T \rightarrow T_c$, $B = 0$ y que $\tanh x \simeq x - x^3/3$ para $|x| \ll 1$, la ecuación (31) implica

$$m = \tanh\left(\frac{T_c}{T}m\right) \simeq \frac{T_c}{T}m - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}m\right)^3 \quad T \rightarrow T_c, B = 0, \quad (33)$$

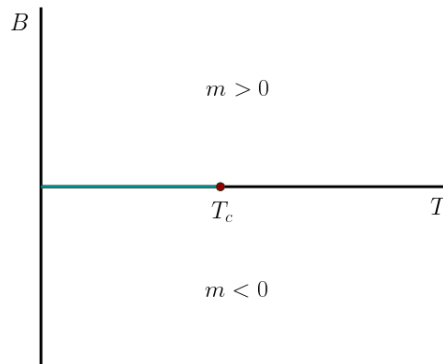
donde hemos usado que $\beta J\gamma = T_c/T$. Si $T < T_c$ la magnetización es no nula, con lo cual podemos dividir por m a ambos lados de esta ecuación y obtenemos

$$m \simeq \pm \frac{T}{T_c} \sqrt{\frac{3(T_c - T)}{T_c}} \simeq \pm \sqrt{\frac{3(T_c - T)}{T_c}} \quad T \rightarrow T_c^-, B = 0, \quad (34)$$

donde en el último paso nos hemos quedado al orden más bajo en $T_c - T$. Usando este resultado, y teniendo en cuenta que $m \rightarrow \pm 1$ cuando $T \rightarrow 0$, ya podemos hacer un buen gráfico de la magnetización en función de la temperatura en ausencia de campo magnético.

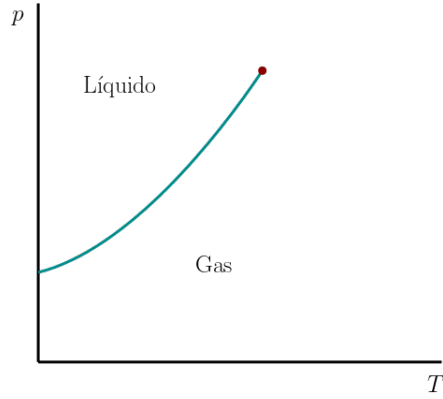


Como vemos, la derivada de la magnetización es discontinua a la temperatura crítica (de hecho diverge cuando nos acercamos a esa temperatura por abajo), así que en ese punto tenemos una transición de fase¹. De hecho, la transición de fase no ocurre sólo a la temperatura crítica sino también a todas las temperaturas inferiores, porque, para $T < T_c$, al pasar de $B = 0^+$ a $B = 0^-$ la magnetización salta de la rama superior de esta figura a la rama inferior. En la siguiente figura mostramos el diagrama de fases del sistema.



Se dice que una transición de fase es *de primer orden* si lo que es discontinuo es una derivada primera de algún potencial termodinámico; se dice que es *de segundo orden* si todas las derivadas primeras de potenciales termodinámicos son continuas, pero hay alguna derivada segunda discontinua; generalizando estas nociones, se dice que una transición de fase es *de orden n* si las primeras discontinuidades aparecen en derivadas n -ésimas de algún potencial termodinámico. En la línea cyan del diagrama de fases ($T < T_c$, $B = 0$) tenemos una transición de fase de primer orden, porque ahí es discontinua la magnetización, que es la primera derivada de la energía libre de Helmholtz respecto al campo magnético. En cambio, en el punto rojo ($T = T_c$, $B = 0$) tenemos una transición de segundo orden porque la magnetización es continua y lo que es discontinuo es su derivada. A los puntos de un diagrama de fases donde tiene lugar una transición de fase de segundo orden se los llama *puntos críticos*. El diagrama que acabamos de estudiar es completamente análogo al de la transición de fase líquido-gas, que seguramente ya conocen y representamos en la siguiente figura.

¹La figura también sugiere que la derivada de la magnetización se anula a $T = 0$, cosa que no hemos mostrado pero que efectivamente es así; lo pueden probar ustedes mismos a partir de (31).



En este caso, en la línea cian también tiene lugar una transición de fase de primer orden (la ebullición), y el punto rojo donde termina esa línea es un punto crítico. Antes hemos estudiado cómo se comporta la magnetización cuando, en ausencia de campo magnético, nos acercamos a la temperatura crítica por debajo (es decir, moviéndonos sobre la línea cian del diagrama de fases). Veamos ahora qué ocurre cuando, manteniendo la temperatura constante e igual a la crítica, nos acercamos al punto crítico partiendo de un campo magnético no nulo. Teniendo en cuenta que cerca del punto crítico se tiene $\beta_c B, m \ll 1$, de (31) vemos que

$$m = \tanh(\beta_c B + m) \simeq \beta_c B + m - \frac{1}{3}(\beta_c B + m)^3 \quad T = T_c, B \rightarrow 0 \quad (35)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\beta_c B \simeq \frac{1}{3}(\beta_c B + m)^3 \quad T = T_c, B \rightarrow 0. \quad (36)$$

Dado que $\beta_c B, m \ll 1$, esta ecuación implica $\beta_c B \ll \beta_c B + m$ y por lo tanto $\beta_c B + m \simeq m$, de manera que obtenemos

$$m \simeq (3\beta_c B)^{1/3} \quad T = T_c, B \rightarrow 0. \quad (37)$$

Por último, veamos cómo se comporta la susceptibilidad $\chi = \partial m / \partial B|_{B=0}$ a medida que nos acercamos a la temperatura crítica. La derivada de (31) respecto al campo magnético da

$$\frac{\partial m}{\partial B} = \frac{1}{\cosh^2(\beta B + T_c m/T)} \left(\beta + \frac{T_c}{T} \frac{\partial m}{\partial B} \right). \quad (38)$$

Evalutando en $B = 0$ obtenemos

$$\chi = \frac{1}{\cosh^2(T_c m/T)} \left(\beta + \frac{T_c}{T} \chi \right) \quad (39)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\chi = \frac{1}{k [T \cosh^2(T_c m/T) - T_c]}. \quad (40)$$

A temperaturas superiores a la crítica la magnetización se anula, así que

$$\chi = \frac{1}{k(T - T_c)} \quad T > T_c. \quad (41)$$

Por otra parte, para $T \rightarrow T_c^-$ la magnetización está dada por (34). Usando esa ecuación y la aproximación $\cosh x \simeq 1 + x^2/2$ para $|x| \ll 1$ vemos que

$$T \cosh^2(Tm/T_c) \simeq T_c + 2(T_c - T) \quad T \rightarrow T_c^-, \quad (42)$$

y reemplazando en (40) obtenemos

$$\chi \simeq \frac{1}{2k(T_c - T)} \quad T \rightarrow T_c^-. \quad (43)$$

Así pues, por (41) y (43), la susceptibilidad magnética diverge como $1/|T - T_c|$ a medida que nos acercamos a la temperatura crítica.

¿Qué tan buena es la aproximación de campo medio? En los casos de interés, no tanto. La aproximación es muy buena cuando la dimensión es muy grande, porque en ese caso el número γ de primeros vecinos también lo es y entonces, en un estado típico, las distintas contribuciones al primer término del lado derecho de (27) (el término que despreciamos) se cancelan entre sí. Pero a medida que bajamos la dimensión la aproximación se va volviendo cada vez peor. El caso extremo es el unidimensional: en ese caso, la aproximación de campo medio predice que el sistema se magnetiza espontáneamente a temperaturas inferiores a $T_c = 2J/k$, lo cual ya sabemos que es falso por lo que hemos visto en nuestra solución exacta: en una dimensión no hay magnetización espontánea a no ser que la temperatura sea cero. Si se quiere, en el caso unidimensional la temperatura crítica exacta es $T_c = 0$, así que la aproximación de campo medio sobreestima esa temperatura. Ésta es una característica genérica de esta aproximación. Para una red cuadrada en dos dimensiones, la solución exacta de Onsager muestra que sí hay magnetización espontánea a temperatura no nula, pero ésta ocurre a temperaturas inferiores a $T_c = 2J/[k \ln(\sqrt{2} + 1)] \simeq 2.269J/k$, la cual de vuelta es inferior a la que se obtiene en la aproximación de campo medio, $T_c = 4J/k$. A medida que la dimensión aumenta, análisis numéricos muestran que la temperatura crítica exacta se acerca cada vez más a la predicción de campo medio. Por otra parte, cerca del punto crítico se sabe que la magnetización y la susceptibilidad obedecen leyes de potencias,

$$\begin{aligned} m &\sim (T_c - T)^\beta & T \rightarrow T_c^-, B = 0 \\ m &\sim B^{1/\delta} & T = T_c, B \rightarrow 0 \\ \chi &\sim |T - T_c|^{-\gamma} & T \rightarrow T_c, B = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Los parámetros β , δ y γ reciben el nombre de *exponentes críticos* (no confundir β con la inversa de la temperatura ni γ con el número de primeros vecinos; desgraciadamente, la notación es estándar y es así). De acuerdo con las ecuaciones (34), (37), (41) y (43), la aproximación de campo medio da $\beta = 1/2$, $\delta = 3$ y

$\gamma = 1$, independientemente de la red. En realidad, el valor exacto de los exponentes críticos no es independiente de la red. En el caso de la red bidimensional cuadrada, la solución de Onsager da $\beta = 1/8$, $\delta = 15$ y $\gamma = 7/4$; en el caso tridimensional los exponentes críticos calculados numéricamente se parecen un poco más a los de campo medio, y resulta que en dimensión mayor o igual a 4 el resultado de campo medio para los exponentes críticos es exacto. Entender por qué es así escapa al alcance de este apunte, pero los que tengan curiosidad fíjense en la sección 2.2.4 de [estas notas](#) (adivinen de quién son).