

Problemas enumerativos de combinatoria

Facundo Rost

Física Teórica 3 - 1er cuatrimestre de 2020

1. Combinatoria

Ahora calcularemos ciertos problemas enumerativos relevantes en combinatoria. Éstos están clasificados en el Twelvefold Way o el Twentyfold Way: Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way.

Calculemos ahora la cantidad de formas de:

1.1. Ordenar un conjunto de n elementos distinguibles

Es igual a la cantidad de formas de elegir el primer elemento (n formas) multiplicado por la cantidad de formas de elegir el segundo elemento ($n - 1$ formas, porque el elemento elegido anteriormente ya no está disponible) multiplicado por la cantidad de formas de elegir el tercer elemento ($n - 2$ formas, porque los 2 elementos elegidos anteriormente ya no están disponibles) y así sucesivamente hasta multiplicar por la cantidad de formas de elegir el n -ésimo elemento (1 formas, porque los $n - 1$ elementos elegidos anteriormente ya no están disponibles), luego es igual a:

$$n(n - 1)(n - 2)(\dots)3 \cdot 2 \cdot 1 \equiv n!$$

Ésto es equivalente a repartir n bolas distinguibles en n cajas distinguibles de forma que cada caja tenga exactamente 1 bola.

1.2. Elegir k elementos ordenados de un conjunto de n elementos distinguibles con $k \leq n$.

Es igual a la cantidad de formas de elegir el primer elemento (n formas) multiplicado por la cantidad de formas de elegir el segundo elemento ($n - 1$ formas, porque el elemento elegido anteriormente ya no está disponible) multiplicado por la cantidad de formas de elegir el tercer elemento ($n - 2$

formas, porque los 2 elementos elegidos anteriormente ya no están disponibles) y así sucesivamente hasta multiplicar por la cantidad de formas de elegir el k -ésimo elemento ($n - k + 1$ formas, porque los $k - 1$ elementos elegidos anteriormente ya no están disponibles), luego es igual a:

$$n(n-1)(n-2)(\cdots)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esto es equivalente a repartir n bolas distinguibles en k cajas distinguibles de forma que cada caja tenga a lo sumo 1 bola.

1.3. Elegir k elementos de un conjunto de n elementos distinguibles con $k \leq n$, sin importar el orden

Es igual al anterior resultado dividido la cantidad de formas $k!$ de ordenar los k elementos elegidos:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Esto es igual a su vez a la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos.

También es equivalente a repartir k bolas indistinguibles en n cajas distinguibles de forma que cada caja tenga a lo sumo 1 bola.

1.4. Repartir n bolas distinguibles en k cajas distinguibles

Cada una de las n bolas puede ir a k cajas distintas. Luego, se tiene que la cantidad de formas de repartir n bolas distinguibles en k cajas distinguibles es igual a:

$$k^n \tag{1}$$

1.5. Repartir n bolas indistinguibles en k cajas distinguibles

El problema es equivalente a tener $n+k-1$ 'cosas' $CCCCC(\cdots)CCCC$ ordenados de izquierda a derecha, de los cuales hay n que son bolas O y hay $k-1$ que son separadores $|$ (que separan las bolas de las distintas cajas), pero inicialmente no sabemos cuales de los $n+k-1$ cosas son bolas y cuales son separadores; y saber esto último es equivalente a saber $CCCCC(\cdots)CCCC = OO|O|OO(\cdots)O|OO|O$ cuantos elementos hay en la primera caja (a la izquierda del primer separador), cuantos elementos hay en la segunda caja (entre el primer separador y el segundo), y en general cuantos elementos hay en la r -ésima caja (entre el separador $r-1$ y el separador r , con $r \leq k-1$), y cuantos elementos hay en la k -ésima caja (a la derecha del separador $k-1$). En definitiva, calcular las formas de repartir

n bolas indistinguibles en k cajas distinguibles es equivalente a calcular las formas de elegir $k - 1$ elementos de un conjunto de $n + k - 1$, que es igual a:

$$\binom{n + k - 1}{k - 1} = \binom{n + k - 1}{n} \quad (2)$$

1.6. Repartir n bolas indistinguibles en $k \leq n$ cajas distinguibles con ninguna vacía

Podemos pensar que cada una de las $k \leq n$ cajas tiene al menos un elemento, y en vez de pensar cuantos elementos tiene cada caja, pensar cuantos elementos tiene cada caja además del elemento que ya de por sí tiene. Es decir, podemos pensar nuevamente que tenemos $n - 1$ cosas $CCCC(\dots)CCC$ ordenadas de izquierda a derecha, de las cuales hay $n - k$ que son bolas O (hay k bolas que ya de por sí están repartidas una en cada una de las k cajas) y hay $k - 1$ que son separadores $|$ (que separan las bolas de las distintas cajas), pero inicialmente no sabemos cuales de las $n - 1$ cosas son bolas y cuales son separadores; y saber ésto último es equivalente a saber $CCCCC(\dots)CCCC = OO|O|OO(\dots)O|OO|O$ cuantos elementos hay en la primera caja además del elemento que de por sí tiene (a la izquierda del primer separador), cuantos elementos hay en la segunda caja además del elemento que de por sí tiene (entre el primer separador y el segundo), y en general cuantos elementos hay en la r -ésima caja además del elemento que de por sí tiene (entre el separador $r - 1$ y el separador r , con $r \leq k - 1$), y cuantos elementos hay en la k -ésima caja además del elemento que de por sí tiene (a la derecha del separador $k - 1$). En definitiva, calcular las formas de repartir n bolas indistinguibles en k cajas distinguibles con ninguna vacía es equivalente a calcular las formas de elegir $k - 1$ elementos de un conjunto de $n - 1$, que es igual a:

$$\binom{n - 1}{k - 1} = \binom{n - 1}{n - k} \quad (3)$$

1.7. Repartir n bolas distinguibles en $k \leq n$ cajas indistinguibles con ninguna vacía

Por definición, el número de Stirling $S(n, k)$ de segunda especie es la cantidad de formas de repartir n bolas distinguibles en k cajas indistinguibles, dejando ninguna vacía. Equivalentemente, $S(n, k)$ es la cantidad de particiones P de un conjunto de n elementos en $|P| = k$ subconjuntos (por supuesto, no vacíos). De hecho, no es difícil ver que el número de Bell B_n definido como la cantidad total de particiones P de un conjunto de n elementos, es igual a $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_number).

Para más detalles, ver https://en.wikipedia.org/wiki/Stirling_numbers_of_the_second_kind. También se denotan $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Una fórmula explícita para calcularlos es:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad (4)$$

Los números de Stirling $S(n, k)$ de segunda especie se pueden definir también algebraicamente como los coeficientes tales que:

$$\sum_{k=0}^n S(n, k) x(x-1)(\cdots)(x-n+1) = x^n$$

Análogamente se definen algebraicamente los números de Stirling $s(n, k)$ de primera especie como los coeficientes tales que:

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) x^k = x(x-1)(\cdots)(x-n+1)$$

También hay una relación entre números de Stirling de segunda especie y el orden normal de operadores $a^\dagger, a$ tales que $[a, a^\dagger] = 1$:

$$(a^\dagger a)^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (a^\dagger)^k a^k$$

Y a su vez, de ésto último se puede deducir que el número de Bell es igual a (siendo $|z\rangle$ un estado coherente tal que $a|z\rangle = z|z\rangle$):

$$B_n = \langle z | (a^\dagger a)^n | z \rangle \Big|_{z=1}$$

También, los polinomios de Bell $B_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} S(n, k) x^k$ verifican:

$$B_n(|z|^2) = \langle z | (a^\dagger a)^n | z \rangle$$

y además vale:

$$\langle z | e^{\lambda a^\dagger a} | z \rangle = e^{|z|^2(e^\lambda - 1)}$$

1.8. Repartir n bolas distinguibles en k cajas indistinguibles

No es difícil ver que ésto es igual a la suma $\sum_{j=0}^k$ de la cantidad de formas de repartir n bolas distinguibles en k cajas indistinguibles con exactamente j cajas no vacías (que como son indistinguibles, no importa cuales cajas son las vacías), lo cual es igual a la suma $\sum_{j=0}^k$ de la cantidad de formas de repartir n bolas distinguibles en j cajas indistinguibles, es decir, es igual a:

$$\sum_{j=0}^k S(n, j) \quad (5)$$

1.9. Repartir n bolas distinguibles en $k \leq n$ cajas distinguibles con ninguna vacía

Nótese que ésto es igual a la cantidad de formas de repartir n bolas distinguibles en $k \leq n$ cajas indistinguibles con ninguna vacía, multiplicado por las formas de ordenar k cajas ($k!$), luego es igual a:

$$k! S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad (6)$$

1.10. Repartir n bolas indistinguibles en k cajas indistinguibles con ninguna vacía

Ésto es igual a calcular la cantidad de formas que hay de expresar al número natural n como suma de exactamente k números naturales (positivos). Éste número se define como las formas de partir a n en k partes:

$$p_k(n) \quad (7)$$

Notemos que la cantidad de formas que hay de expresar al número natural n como suma de números naturales (positivos), es decir el número de particiones de n , es igual a $p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n)$. Ésta no tiene una expresión cerrada pero posee recurrencias, expansiones asintóticas y está en términos de series convergentes: Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_function_\(number_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_function_(number_theory)).

1.11. Repartir n bolas indistinguibles en k cajas indistinguibles

Ésto es igual a sumar $\sum_{j=1}^k$ la cantidad de formas que hay de expresar al número natural n como suma de exactamente j números naturales (positivos) y $k-j$ números nulos (que no aportan nada). Luego, es igual a: $\sum_{j=1}^k p_j(n)$.

A su vez, si a cada una de las k cajas les añadimos exactamente una bola extra (además de las n bolas iniciales), y después repartimos las n bolas iniciales, vemos que la cantidad de formas de hacer ésto es la misma que la que queremos calcular. Y, a su vez es equivalente a calcular la cantidad de formas de repartir $n+k$ bolas indistinguibles en k cajas indistinguibles con ninguna vacía (ya que hay k bolas extras y en cada una de las k cajas hay exactamente una de las k bolas extras, de forma que no haya ninguna vacía), y como vimos en la subsección anterior, ésto es igual a:

$$p_k(n+k) = \sum_{j=1}^k p_j(n) \quad (8)$$

En particular, notar $p(n) = \sum_{j=1}^n p_j(n) = p_n(2n)$.

1.12. Repartir n bolas distinguibles o indistinguibles en k cajas indistinguibles con a lo sumo un elemento en cada caja

Notar que si $n > k$, entonces no puedo poner a lo sumo un elemento en cada caja, y no hay forma de lograr ésto. Y si $n \leq k$, entonces como las cajas son indistinguibles da igual en que caja ubique cada elemento, da igual cuales cajas son vacías y que elemento haya en cada caja. Luego, tenemos que la cantidad de formas de repartir n bolas distinguibles o indistinguibles en k cajas indistinguibles con a lo sumo un elemento en cada caja es igual a:

$$\begin{cases} 1 & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases} \quad (9)$$

1.13. Twelvefold Way

Ya calculamos ciertos problemas enumerativos relevantes en combinatoria. Éstos están clasificados en el Twelvefold Way o el Twentyfold Way: Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way.

Notar que el problema de repartir n bolas en k cajas con ciertas condiciones es equivalente a ver cuantas (clases de equivalencias de) funciones con ciertas condiciones $f : N \rightarrow K$ existen de un conjunto N con n elementos a un conjunto K con k elementos. En la analogía, la función f le asigna a cada bola $b \in N$ la caja $c = f(b) \in K$ que le corresponde.

Las condiciones posibles que se consideran sobre la función f son tres:

- Si es sobreyectiva, o equivalentemente si cada caja de K posee al menos una bola.
- Si es inyectiva, o equivalentemente si cada caja de K posee a lo sumo una bola.
- Si no tiene ninguna condición: Puede o no ser sobreyectiva o inyectiva.

Y las condiciones que se consideran sobre la equivalencia de funciones $f : N \rightarrow K$ (es decir, si dos funciones f_1, f_2 son equivalentes entonces no se cuentan dos veces: Se cuentan una sola vez) son las siguientes:

- Dos funciones $f, g : N \rightarrow K$ son equivalentes si y sólo si son exactamente iguales $f = g$. Ésto es lo mismo que considerar que las n bolas son distinguibles y las k cajas son distinguibles.

- Dos funciones $f, g : N \rightarrow K$ son equivalentes si y sólo si son iguales a menos de una permutación de N : $f \circ \sigma_N = g$ para alguna permutación $\sigma_N \in S_N \simeq S^n$. Ésto es lo mismo que considerar que las n bolas son indistinguibles y las k cajas son distinguibles.
- Dos funciones $f, g : N \rightarrow K$ son equivalentes si y sólo si son iguales a menos de una permutación de K : $\sigma_K \circ f = g$ para alguna permutación $\sigma_K \in S_K \simeq S^k$. Ésto es lo mismo que considerar que las n bolas son distinguibles y las k cajas son indistinguibles.
- Dos funciones $f, g : N \rightarrow K$ son equivalentes si y sólo si son iguales a menos de una permutación de N y una permutación de K : $\sigma_K \circ f \circ \sigma_N = g$ para alguna permutación $\sigma_N \in S_N \simeq S^n$ y alguna permutación $\sigma_K \in S_K \simeq S^k$. Ésto es lo mismo que considerar que las n bolas son indistinguibles y las k cajas son indistinguibles.

En lo anterior, S^n es el grupo de permutaciones de un conjunto de $n \in \mathbb{N}$ elementos.

En total, las posibles combinaciones de condiciones sobre f y sobre la equivalencia de funciones es $3 \cdot 4 = 12$, y éstos son los 12 casos que muestra la página: https://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way.