Guía 2, problemas de combinatoria

Guillem Pérez Nadal

Prefacio

En este documento resolvemos prácticamente todos los problemas de combinatoria de la guía 2. Se recomienda fuertemente que traten de hacerlos por ustedes mismos, y recién después de hacer el esfuerzo vengan a ver la resolución que presentamos aquí. ¡Se van a divertir!

Problemas 1-4

1. **Pregunta.** *¿De cuántas formas se pueden ordenar 5 personas en hilera para sacarse una foto? ¿De cuántas formas si A y B deben estar uno al lado del otro?*

   Respuesta. Éste es un problema de permutaciones, así que la respuesta a la primera pregunta es 5!. En cuanto a la segunda, si A y B tienen que salir juntos hay dos posibilidades: que aparezcan en el orden AB o en el orden BA. Para cada una de estas posibilidades el par se comporta como si fuera una sola persona, así que en este caso el número de formas de ordenar el grupo es $2 \cdot 4!$.

2. **Pregunta.***¿Cuántas palabras de 3 letras (tengan o no sentido) se pueden formar con las letras a, b, c, d, e y f? ¿Y si no se pueden repetir letras?*

   Respuesta. En total tenemos 6 letras. Si se pueden repetir, entonces tenemos 6 posibilidades en cada una de las tres posiciones, con lo cual el número de palabras es $6^3 = 216$. Si no se pueden repetir, entonces se nos está preguntando por el número de 3-permutaciones de un conjunto de 6 elementos, y por lo tanto la respuesta es $6!/(6-3)! = 120$.

3. **Pregunta.** *Se llama anagrama de una palabra a toda permutación de sus letras, tenga o no sentido. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra MANZANA?*

   Respuesta. El número de anagramas de MANZANA es el número de permutaciones de sus 7 letras dividido por el número de permutaciones de las 3 A's y el de las 2 N's, $7!/(3!2!)$.

4. **Pregunta.** *Para un torneo de ping pong se anotaron 6 personas. ¿Cuántos partidos se van a jugar si todos tienen que jugar entre sí?*

   Respuesta. La pregunta que nos están haciendo es de cuántas formas podemos elegir 2 jugadores de un conjunto de 6, así que la respuesta es $\binom{6}{2} = 15$.

Problema 5 (¡muy importante!)

Enunciado

¿Cuántas maneras hay de amontonar N libros indistinguibles en M cajas distinguibles? ¿Cómo cambia el resultado si los libros son distinguibles e importa el orden en que se amontonan en cada caja? ¿Y si no importa ese orden?

Resolución

Éste es un problema muy importante para la materia, así que conviene que se aseguren de entenderlo bien. Empecemos por el caso indistinguible.

> *En el caso indistinguible, dar una configuración es decir* ***cuántos*** *libros hay en cada caja.*

Podemos representar cada configuración gráficamente con bolitas y palitos. Por ejemplo, en el caso $N = 6$, $M = 4$ la configuración correspondiente a tener 2 libros en la primera caja, 3 libros en la segunda, ninguno en la tercera y uno en la cuarta se puede representar así:

$$\bullet \quad \bullet \quad \Big| \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \Big| \quad \Big| \quad \bullet$$

Cualquier otra configuración la obtenemos permutando bolitas y palitos; por ejemplo, intercambiando la segunda bolita por el primer palito obtenemos la configuración en la que hay 1 libro en la primera caja, 4 en la segunda, ninguno en la tercera y 1 en la cuarta. Ahora bien, nótese que permutando bolitas entre sí o palitos entre sí no cambiamos de configuración. Por lo tanto, el número de configuraciones es el número de permutaciones de todos los objetos (bolitas y palitos) dividido por el de las bolitas entre sí y el de los palitos entre sí. ¿Cuántas bolitas hay? Tantas como libros, N. ¿Y cuántos palitos? Uno menos que el número de cajas, $M - 1$. Por lo tanto, el número de configuraciones es

$$\Omega_{\text{ind}} = \frac{(N + M - 1)!}{N!(M - 1)!} = \binom{N + M - 1}{N}. \tag{1}$$

¿Por qué nos ha aparecido un combinatorio? Bueno, porque en realidad el problema se puede pensar como un problema de combinaciones. En efecto, tenemos $N+M-1$ sitios, que pueden ser ocupados por una bolita o un palito. Dar una configuración es elegir N de esos sitios para que sean ocupados por una bolita, de ahí el resultado que hemos obtenido.

Vamos ahora con el caso distinguible. Nos centraremos en el caso en que no importa el orden dentro cada caja; el otro caso se lo dejo para ustedes.

> *En el caso distinguible, y si no importa el orden dentro de cada caja, dar una configuración es decir* ***qué*** *libros hay en cada caja.*

Nótese que decir qué libros hay en cada caja es lo mismo que decir en qué caja está cada libro. Para cada libro tenemos M posibilidades (tantas como cajas), y por lo tanto el número de configuraciones en este caso es

$$\Omega_{\text{dist}} = M^N. \tag{2}$$

La relación entre los casos distinguible e indistinguible es sencilla si $N \ll M$, es decir, si hay muchos menos libros que cajas. En efecto, en ese caso tenemos

$$\Omega_{\text{ind}} = \frac{1}{N!}\underbrace{(N+M-1)(N+M-2)\dots M}_{N\text{ factores}} \simeq \frac{M^N}{N!} = \frac{\Omega_{\text{dist}}}{N!}, \tag{3}$$

es decir, el caso indistinguible se obtiene dividiendo el caso distinguible por $N!$. Es importante remarcar que esto es una aproximación que vale sólo cuando hay muchos menos libros que cajas. Este tipo de aproximación va a aparecer más adelante cuando estudiemos el gas ideal en física estadística.

Problema 6

Enunciado

Se arrojan N monedas. Determine el número de secuencias en las que

(a) aparecen exactamente n caras;

(b) no hay dos caras seguidas;

(c) aparecen dos caras seguidas recién en los últimos dos tiros;

(d) el número de caras es par.

Resolución

Vamos a resolver sólo el ítem (b) porque ilustra otro método útil para resolver problemas de combinatoria que no hemos visto hasta ahora: buscar una relación de recurrencia. Los otros ítems quedan para ustedes. Sea S_N el número de secuencias de N monedas en las que no hay dos caras seguidas, y sean S_N^{x} y S_N^{c} los números de secuencias de N monedas en las que no hay dos caras seguidas y la última moneda es cruz (x) y cara (c) respectivamente. Tenemos

$$S_N = S_N^{\mathrm{x}} + S_N^{\mathrm{c}}. \tag{4}$$

Ahora, si la última moneda es cruz, entonces para las monedas anteriores podemos elegir cualquier secuencia en la que no hay dos caras seguidas, con lo cual

$$S_N^{\mathrm{x}} = S_{N-1}. \tag{5}$$

En cambio, si la última moneda es cara, entonces las monedas anteriores forman una secuencia en la que no hay dos caras seguidas y la última moneda es cruz,

$$S_N^{\mathrm{c}} = S_{N-1}^{\mathrm{x}} = S_{N-2} \tag{6}$$

(en la última igualdad hemos usado (5)). Reemplazando (5) y (6) en (4) obtenemos la relación de recurrencia que buscábamos,

$$S_N = S_{N-1} + S_{N-2}. \tag{7}$$

Para poder determinar S_N necesitamos complementar esta relación con los valores de S_1 y S_2, pero eso es fácil: si tiro sólo una moneda hay dos secuencias posibles y en ninguna aparecen dos caras seguidas, así que $S_1 = 2$; si tiro dos monedas hay cuatro secuencias posibles y sólo una de ellas (cc) tiene dos caras seguidas, con lo cual $S_2 = 3$. Con la relación de recurrencia y estos dos datos iniciales tenemos todo lo que necesitamos para determinar S_N, pero igualmente se trata de un problema difícil. Lo que nos allana el camino es darnos cuenta de que... ¡La ecuación (7) es la relación de recurrencia de la sucesión de Fibonacci! La sucesión de Fibonacci F_N tiene por datos iniciales $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, y la lista sigue de la siguiente manera:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Comparando con nuestros datos iniciales vemos que S_N es la sucesión de Fibonacci pero empezando en su tercer elemento, es decir,

$$S_N = F_{N+2}. \tag{8}$$

Ahora, la sucesión de Fibonacci tiene un término general conocido,

$$F_N = \frac{\varphi^N - (-\varphi)^{-N}}{2\varphi - 1}, \tag{9}$$

donde φ es la famosa proporción áurea,

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{10}$$

y por lo tanto la respuesta a la pregunta que nos hacen es

$$S_N = \frac{\varphi^{N+2} - (-\varphi)^{-N-2}}{2\varphi - 1}. \tag{11}$$

¿No es hermoso?