Guía 2, Problema 11

Juan Schmidt

Enunciado

Dos personas, A y B, juegan a lanzar alternativamente una moneda; gana el primero que obtiene cara. Si A hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. (*Sugerencia*: hay infinitos caminos que llevan a uno u otro ganador y la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando la probabilidad de cada camino independiente; trate de dar a esta proposición una forma rigurosa. Al margen de lo anterior, la simetría del problema permite llegar más rápidamente al resultado: note que luego del primer lanzamiento, si A no gana, a partir del segundo lanzamiento los roles de A y B se intercambian; formalice esto último y obtenga, en un par de pasos, el resultado.)

Aclaraciones previas

En este problema usaremos como herramienta a la **probabilidad condicionada** $p(C|D)$. Esta corresponde intuitivamente a la probabilidad de que ocurra C dando por sentado que D ocurrió, a diferencia de $p(C)$ que es la probabilidad de que ocurra C sin suponer nada sobre D. La probabilidad condicionada podemos relacionarla con la probabilidad $p(C \cap D)$ de que ocurran C y D *simultaneamente* mediante

$$p(C \cap D) = p(D).p(C|D) \tag{1}$$

Ya sé, el documento parece demasiado largo para un problema no tan complicado. Esto es porque está resuelto con distintos estilos, para que se queden con el que mejor les resulte. Quizá despues de la primer página ya hayan leído todo lo que necesitaban leer, y pueden dejarlo ahi.

Para comprender bien el eje central del problema intentaremos resolverlo en primer lugar lo más intuitivamente posible, sin formalizar innecesariamente cada paso. Una vez claro este tratamiento, quienes tengan interés, podrán continuar leyendo para ver tratamiento un poco más riguroso.

Intuitivamente

Como claramente menciona el enunciado, este problema se puede resolver de dos formas: una más larga, y otra más corta. Veamos como tratar a cada una de forma de forma intuitiva.

Forma larga

Muchas veces puede ser útil armar un diagrama de árbol que esquematice las distintas posibilidades en que puede desarrollarse el juego

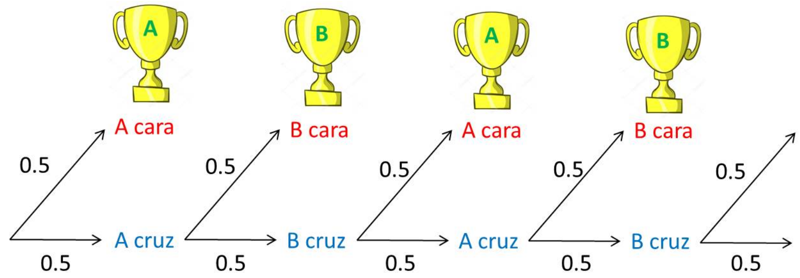

Figura 1

Podemos ver en el diagrama, los distintos caminos que pueden llevar a que A gane. Cada uno de los caminos implica una serie de sucesos distinta. Podemos escribir la probabilidad de que A gane como la suma de las probabilidades que tiene cada camino favorable para A

$$p(\mathbf{A}) = 0{,}5 + 0{,}5 \ . \ 0{,}5 \ . \ 0{,}5 + ... \tag{2}$$

Aquí el primer término corresponde a la probabilidad que A saque cara en la primer jugada. El segundo término corresponde a la probabilidad de que A saque cruz en la primer jugada **y** B saque cruz en la segunda jugada **y** A saque cara en la tercer jugada. Acá el nexo **y** que une a las proposiciones resulta clave, nos indica que estamos tratando con un término es del estilo $p(C \cap D \cap E)$. Para este podemos hacer uso de la ec. (1), y escribirlo como el producto de tres probabilidades. Estamos multiplicando: [probabilidad de que A saque cruz] x [probabilidad de que B saque cruz, suponiendo que A sacó cruz] x [probabilidad de que A saque cara suponiendo que antes A y B sacaron cruz], donde cada una vale 0,5.

Si continuamos mirando los demás posibles caminos por los cuales puede ganar A veremos que cada camino corresponde a una potencia impar de 0,5, con lo cual

$$p(\mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} (0{,}5)^{2n-1} \tag{3}$$

Comprueben, en cambio, que la probabilidad de cada camino que lleva a la victoria de B corresponde a una potencia par de 0,5, con lo cual

$$p(\mathbf{B}) = \sum_{n=1}^{\infty} (0{,}5)^{2n} \tag{4}$$

Usando el resultado para la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (0{,}25)^n = \frac{1}{1 - 0{,}25} = \frac{4}{3} \tag{5}$$

obtenemos que $p(\mathbf{A}) = (0{,}5)^{-1}(4/3 - 1) = 2/3$ y $p(\mathbf{B}) = 4/3 - 1 = 1/3$.

Forma corta

Usemos la ayuda que nos da el enunciado: *note que luego del primer lanzamiento, si A no gana, a partir del segundo lanzamiento los roles de A y B se intercambian.* En otras palabras, si damos por sentado que A falló en la primer jugada, entonces ahora B tendrá las probabilidades de ganar que antes tenía A.

Matemáticamente, la probabilidad de que B gané dando por sentado que A falló en su primer jugada corresponde a una probabilidad condicionada:

$$p(\text{B gane}|\text{A pierda la primera jugada}) = p(\text{A gane}) \tag{6}$$

Aquí podemos usar la ec. (1) para escribir dicha probabilidad condicionada en términos de la probabilidad de que A falle en la primer jugada **y** B gane la partida. Como es necesario que A pierda la primera jugada para que B pueda ganar, entonces la probabilidad de que A pierda la primera jugada y B gane no es más que simplemente la probabilidad de que B gane. Matematicamente, nos queda

$$\frac{p(\text{B gane} \cap \text{A pierda la primera jugada})}{p(\text{A pierda la primera jugada})} = \frac{p(\text{B gane})}{0{,}5} = p(\text{A gane}) \tag{7}$$

Además, intuitivamente nos resulta fácil entender que el juego a fin de cuentas se reduce a dos posibilidades: que A gane, o que B gane. Por eso, esperamos que

$$p(\text{A gane}) + p(\text{B gane}) = 1 \tag{8}$$

Las ecuaciones (7) y (8) son el sistema de ecuaciones completo que necesitamos para obtener nuevamente que $p(\mathbf{A}) = 2/3$ y $p(\mathbf{B}) = 1/3$.

Siendo un poco más formales

La probabilidad de la que hablemos quedará bien definida en la medida que:

1) Sepamos cuál es el conjunto de todos los *eventos* o resultados posibles, al que llamaremos **espacio muestral** M.

2) Tengamos bien definido subconjunto C del espacio muestral al que le queremos asignar esa probabilidad.

Para cualquier subconjunto C del espacio muestral, tenemos que tener definida una probabilidad $p(C)$. Esta nos dará la noción sobre qué tan favorable es que ocurra *alguno* de los eventos que inclufmos en C. Esto vale para el espacio muestral mismo, siendo $p(M) = 1$ SIEMPRE.

Además, para que dicho numero $p \in [0, 1]$ que le asignamos a cada subconjunto sea realmente una probabilidad, debe cumplir que

$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) \tag{9}$$

siendo C y D cualquier par de subconjuntos *disjuntos*, es decir, que no contengan ningún elemento en común. $C \cup D$ es el conjunto que se obtiene como unión de los conjuntos C y D. Entonces $p(C \cup D)$ nos da la noción de qué tan favorable es que ocurra alguno de los eventos incluídos ya sea en C o en D.

Por otro lado, más allá de su interpretación intuitiva, la **probabilidad condicionada** se define formalmente como

$$p(C|D) = \frac{p(C \cap D)}{p(D)} \tag{10}$$

Que es básicamente la ec. (1). $p(C \cap D)$ es la probabilidad de que ocurra algún evento que esté incluído tanto en C como en D.

Notar que $p(D|D) = 1$, con lo cual para la probabilidad condicionada D se estaría comportando como si fuera un nuevo espacio muestral restringido.

Notación

Representemos a cada evento con una secuencia o *tupla*, en donde indicamos con letra A o B a quién correspondió la jugada, con la presencia o ausencia de techito si ese jugador sacó cruz o cara, y donde la posición en la secuencia nos indica en qué jugada ocurrió cada cosa. Por ejemplo $(\overline{A}, \overline{B}, A)$ representa el evento en el cual A tiró cruz en la primer jugada, B tiró cruz en la segunda jugada, y A tiró cara en la tercer jugada, dándose por finalizada la partida.
Podemos escribir al espacio muestral como el conjunto de todas las posibles partidas

$$M = \{(A), (\overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B}, A), (\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}, B), ...\} \tag{11}$$

Para evitar escribir explícitamente a los conjuntos a la hora de asignarles una probabilidad, usemos otra notación más. Vamos a llamar $\overline{B}_2$ al conjunto de todas las tuplas que contengan $\overline{B}$ en la segunda posición, es decir

$$\overline{B}_2 = \{(\overline{A}, \overline{B}, A), (\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}, \overline{B}, A), ...\} \tag{12}$$

siguiendo con esa lógica, el conjunto A_5, por ejemplo, tendrá un único elemento

$$A_5 = \{(\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}, \overline{B}, A)\} \tag{13}$$

Y aprovechemos ahora para remarcar la diferencia entre la probabilidad a secas, y la probabilidad condicionada. Si quisieramos calcular $p(B_2)$ el conjunto de eventos favorables sería $B_2 = \{(\overline{A}, B)\}$, mientras que el conjunto de eventos totales sería el M de la ec. 11. Por otro lado, si quisieramos calcular $p(B_2|\overline{A_1})$ tendríamos el mismo conjunto de eventos favorables, pero consideraríamos a los eventos totales dados por

$$''M'' = \overline{A}_1 = \{(\overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B}, A), (\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}, B), ...\} \tag{14}$$

en donde se puede ver que ya dejamos de lado al evento (A). Como dijimos antes, para que esté bien definida la probabilidad de la que hablemos, no solo debemos tener el claro el conjunto al que le asignemos la probabilidad, sino que tambien el espacio muestral.

Forma larga

Sabemos que, en la primera jugada, el jugador A tiene la misma probabilidad de tirar cara como de tirar cruz, por lo tanto

$$p(A_1) = p(\overline{A}_1) \tag{15}$$

Además, estos dos conjuntos son disjuntos con lo cual

$$p(A_1) + p(\overline{A}_1) = p(A_1 \cup \overline{A}_1) \tag{16}$$

Y podemos comprobar que si al conjunto $\overline{A}_1$ dado por la expresión (14) le unimos el conjunto $A_1 = \{(A)\}$, recuperamos el espacio muestral M, con lo cual

$$p(A_1) + p(\overline{A}_1) = p(M) = 1 \tag{17}$$

Como ambas probabilidades son iguales, entonces $p(A_1) = 0{,}5 = p(\overline{A}_1)$. Esto ya lo intuíamos sin tanto lío, pero es bueno saber como obtener este tipo de cosas a partir de los mismos axiomas de probabilidad, para luego poder extenderlo a casos más complejos que superen nuestra intuición. Veamos que sucede cuando queremos calcular $p(B_2)$. Nuevamente ocurre que $p(B_2) = p(\overline{B}_2)$, pero en este caso no se cumple que $B_2 \cup \overline{B}_2 = M$, sino que

$$B_2 \cup \overline{B}_2 = \{(\overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B}, A), (\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}, B), ...\} \tag{18}$$

con lo cual $p(B_2) \neq 0{,}5$.

Sin embargo, pensemos en la probabilidad condicional $p(B_2|\overline{A}_1)$. Intuitivamente sería la probabilidad de que, *dando por sentado que ocurrió* $\overline{A}_1$, ocurra B_2. Acá sigue valiendo que $p(B_2|\overline{A}_1) = p(\overline{B}_2|\overline{A}_1)$ ya que B tiene las mismas chances de sacar cara o cruz. Por suerte vemos que esta vez

$$B_2 \cup \overline{B}_2 = \{(\overline{A}, B), (\overline{A}, \overline{B}, A), (\overline{A}, \overline{B}, \overline{A}, B), ...\} = \overline{A}_1 \tag{19}$$

que es nuestro nuevo "espacio muestral restringido", por lo cual

$$p(B_2|\overline{A}_1) + p(\overline{B}_2|\overline{A}_1) = p(B_2 \cup \overline{B}_2|\overline{A}_1) = p(\overline{A}_1|\overline{A}_1) = 1 \tag{20}$$

y sí obtenemos que $p(B_2|\overline{A}_1) = 0{,}5$. Como mencioné en las aclaraciones previas, calcular estas probabilidades condicionadas nos sirve para calcular otras probabilidades usando la ec. (1)

$$p(B_2 \cap \overline{A}_1) = p(\overline{A}_1).p(B_2|\overline{A}_1) = 0{,}5\ .\ 0{,}5 \tag{21}$$

Notar que el conjunto $B_2 = \{(\overline{A}, B)\}$ está totalmente incluído en $\overline{A}_1$ con lo cual la intersección $B_2 \cap \overline{A}_1 = B_2$, y por ende

$$p(B_2) = p(B_2 \cap \overline{A}_1) = 0{,}5\ .\ 0{,}5 \tag{22}$$

Y así podemos seguir, y análogamente obtener que

$$p(A_3) = p(A_3 \cap \overline{B}_2) = p(\overline{B_2}).p(A_3|\overline{B}_2) = 0{,}5^2\ .\ 0{,}5 \tag{23}$$

y por recurrencia llegar a que

$$p(A_{2n-1}) = (0{,}5)^{2n-1} \tag{24}$$

$$p(B_{2n}) = (0{,}5)^{2n}. \tag{25}$$

A partir de esto ya podemos fácilmente obtener la probabilidad de que A gane, sumando las probabilidades de cada subconjunto A_{2n-1} en el que A ganó (verifiquen que estos conjuntos son disjuntos)

$$p(\mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_{2n-1}) \tag{26}$$

y la probabilidad de que B gane, sumando las probabilidades de cada subconjunto B_{2n} en que B ganó

$$p(\mathbf{B}) = \sum_{n=1}^{\infty} p(B_{2n}) \tag{27}$$

donde $\mathbf{A}$ es el conjunto de todos los escenarios en que A ganó, y $\mathbf{B}$ el conjunto de todos aquellos en que B ganó. Aquí es donde recuperamos las series que ya habíamos obtenido de forma intuitiva

Forma corta

La ayuda que nos daba el enunciado era: *note que luego del primer lanzamiento, si A no gana, a partir del segundo lanzamiento los roles de A y B se intercambian.* En otras palabras, si damos por sentado que A falló en la primer jugada, entonces ahora B tendrá las probabilidades de ganar que antes tenía A. Matemáticamente, la probabilidad de que B gané dando por sentado que A falló en su primer jugada se escribe como $p(\mathbf{B}|\overline{A}_1)$. Así, la pista nos queda traducida a

$$p(\mathbf{B}|\overline{A}_1) = p(\mathbf{A}) \tag{28}$$

Usando la definición de probabilidad condicionada dada por ec. 10, obtenemos

$$\frac{p(\mathbf{B} \cap \overline{A}_1)}{p(\overline{A}_1)} = p(\mathbf{A}) \tag{29}$$

Verifiquemos que $\mathbf{B}$ es un conjunto completamente contenido en el conjunto $\overline{A}_1$, ya que los posibles escenarios en que B gana tienen que estar completamente contenidos en el conjunto de escenarios en que A falló en la primera jugada, con lo cual $\mathbf{B} \cap \overline{A}_1 = \mathbf{B}$

$$\frac{p(\mathbf{B})}{p(\overline{A}_1)} = p(\mathbf{A}) \tag{30}$$

Usando que $p(\overline{A}_1) = 0{,}5$ (ya que, como vimos en la forma larga, A_1 y $\overline{A}_1$ son conjuntos disjuntos que al unirlos dan M, y además tienen la misma probabilidad), obtenemos

$$2p(\mathbf{B}) = p(\mathbf{A}) \tag{31}$$

Esta ecuación sola no nos alcanza para calcular ambas probabilidades. Tengamos en mente que, esperando lo que haya que esperar, necesariamente alguno de los jugadores deberá ganar y el otro perder. Formalmente, estamos diciendo que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos conjuntos disjuntos, cuya unión da todas las posibilidades, osea nuestro espacio muestral M. Por lo tanto

$$p(\mathbf{A}) + p(\mathbf{B}) = p(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = p(M) = 1 \tag{32}$$

Y así recuperamos nuevamente el sistema de ecuaciones que habíamos obtenido antes de forma más intuitiva.