Guía 2, problema 15

Guillem Pérez Nadal

Enunciado

Calcule la media y la varianza de las variables aleatorias descriptas por las siguientes distribuciones de probabilidad:

(a) Uniforme discreta: $P(n) = 1/N$ *con* $n = 1, \ldots, N$.

(b) Binomial: $P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$ *con* $n = 1, \ldots, N$ *y* $p \leq 1$.

(c) Uniforme continua: $f(x) = 1/L$ *con* $x \in [0, L]$.

(d) Exponencial: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ *con* $x, \lambda \geq 0$.

(e) Gaussiana: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Resolución

Vamos a hacer sólo los ítems (b) y (e); el resto queda para ustedes.

(b) La distribución binomial $P(n)$ es la probabilidad de obtener exactamente n éxitos si repetimos N veces un experimento con dos resultados posibles, éxito y fracaso, y probabilidad de éxito p. Por ejemplo, si tiramos 10 veces un dado, la probabilidad de obtener exactamente 3 seis es $P(3)$ con $N = 10$ y $p = 1/6$. El gráfico de la binomial se muestra en la figura 1.

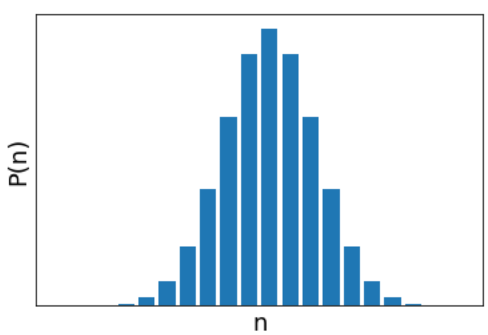

Figura 1: distribución binomial.

El cálculo del valor medio y la varianza de esta distribución puede ser un poco pesado, así que vamos a usar un truco que nos va a simplificar la tarea: calcular la *función generatriz de momentos*

$$F(t) = \langle e^{tn} \rangle. \tag{1}$$

Una vez hayamos calculado la función generatriz va a ser inmediato obtener el valor medio y la varianza, porque

$$\langle n \rangle = F'(0) \qquad \langle n^2 \rangle = F''(0). \tag{2}$$

Además, calcular la función generatriz es fácil,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{N} P(n) e^{tn} = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (pe^t)^n (1-p)^{N-n} = (pe^t + 1 - p)^N, \tag{3}$$

donde en la última igualdad hemos usado la fórmula del binomio. Calculamos las dos primeras derivadas de F,

$$\begin{aligned} F'(t) &= N(pe^t + 1 - p)^{N-1} pe^t \\ F''(t) &= N(N-1)(pe^t + 1 - p)^{N-2} (pe^t)^2 + N(pe^t + 1 - p)^{N-1} pe^t, \end{aligned} \tag{4}$$

y evaluando en $t = 0$ y usando (2) obtenemos directamente

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= F'(0) = Np \\ \Delta n^2 &= F''(0) - [F'(0)]^2 = N(N-1)p^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p). \end{aligned} \tag{5}$$

Los animo a que traten de resolver este ítem sin pasar por la función generatriz; van a ver que lleva mucho más trabajo llegar al resultado. Un comentario final: cuando el número de repeticiones del experimento es muy grande, $N \gg 1$, se tiene $\Delta n / \langle n \rangle \propto 1/\sqrt{N} \ll 1$, y por lo tanto tenemos mucha certeza de que el número de éxitos va a ser $\langle n \rangle$; por otra parte, de la primera ecuación en (5) vemos que $p = \langle n \rangle / N$, así que la probabilidad de obtener éxito en un experimento es la frecuencia con que se obtiene el éxito después de muchas repeticiones. Esto está de acuerdo con la interpretación frecuentista de la probabilidad.

(e) La distribución gaussiana es importante por el teorema central del límite, que dice que, si repetimos muchas veces un experimento y tomamos el promedio de los resultados, ese promedio está distribuido con una gaussiana. El gráfico de esta distribución se muestra en la figura 2.

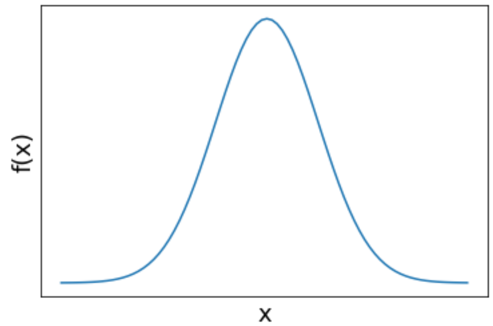

Figura 2: distribución gaussiana.

Una consecuencia del teorema central del límite es lo que se conoce como el teorema de De Moivre-Laplace, que dice que la binomial tiende a la gaussiana cuando N es muy grande; esto se aprecia cualitativamente comparando las figuras 1 y 2. Vamos ahora con el cálculo del valor medio y la varianza de la distribución gaussiana; esta vez lo haremos sin usar la función generatriz. Definiendo la función g por la ecuación $f(x) = g(x-\mu)$, tenemos

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x g(x-\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} du\,(u+\mu)g(u) \\ &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} du\, g(u) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \mu, \end{aligned} \tag{6}$$

donde en la tercera igualdad hemos introducido el cambio de variables $u = x-\mu$, en la cuarta hemos usado que g es par, en la quinta hemos deshecho el cambio de variables y en la última hemos usado que f está normalizada, $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = 1$. Usando este resultado en la fórmula de la varianza, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta x^2 = \langle (x-\mu)^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(x-\mu)^2 f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} du\, u^2 g(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \tag{7}$$

La última integral que nos apareció se puede calcular fácilmente si recordamos la fórmula de la integral gaussiana, $\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-\alpha u^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 e^{-\alpha u^2} = -\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-\alpha u^2} = -\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}. \tag{8}$$

Reemplazando este resultado en (7) con $\alpha = 1/(2\sigma^2)$ obtenemos finalmente

$$\Delta x^2 = \sigma^2. \tag{9}$$