Guía 2, Problema 19

Juan Schmidt

Enunciado

Se observa que en un dado cargado el número 6 sale el doble de veces que el número 1. No se observa nada raro para las otras caras. ¿Cuáles son las probabilidades p_m ($1 \leq m \leq 6$) que maximizan la entropía?

Aclaraciones previas

Al igual que en el ejercicio 18, vamos a buscar la distribución de probabilidad que maximice la entropía estadística, pero que además respete ciertos vínculos. Recordemos que la entropía estadística de una distribución de probabilidades discreta dada por p_m es

$$S(\{p_m\}) = -\sum_m p_m \ln p_m \tag{1}$$

El vínculo que siempre estará presente en cualquier distribución de probabilidad es el de normalización, que para una variable discreta se traduce a

$$\sum_m p_m = 1 \tag{2}$$

En general, cualquier vínculo lo podemos escribir como una hipersuperficie de nivel de una función de los $\{p_m\}$

$$f(\{p_m\}) = f(p_1, p_2, ..., p_\Omega) = c \tag{3}$$

Maximizar a la entropía respetando este vínculo equivale a maximizar

$$\tilde{S}(\{p_m\}, \lambda) = S(\{p_m\}) - \lambda(f(\{p_m\}) - c) \tag{4}$$

ahora no solo respecto de cada p_m sino también de la nueva variable auxiliar λ conocido como *multiplicador de Lagrange*.

Resolución

En este problema específico tenemos 2 vículos: uno por la normalización, y otro para garantizar que el número 6 salga el doble de veces que el 1. Vamos a escribirlos asi:

$$p_6 - 2p_1 = 0, \tag{5}$$

$$\sum_m p_m - 1 = 0 \tag{6}$$

Esto implica que necesitaremos incluir dos multiplicadores de Lagrange (ξ y λ), y maximizar

$$\tilde{S}(p_1, ..., p_6, \lambda, \xi) = S(p_1, ..., p_6) - \lambda\big(\sum_m p_m - 1\big) - \xi(p_6 - 2p_1) \tag{7}$$

Escribiendo todo explícitamente

$$\tilde{S}(p_1, ..., p_6, \lambda, \xi) = -p_1 \ln p_1 - ... - p_6 \ln p_6 - \lambda\big(p_1 + ... + p_6 - 1\big) - \xi(p_6 - 2p_1) \tag{8}$$

Ahora, hay que maximizar esta función. Para esto comenzamos igualando su gradiente a 0, o lo que es igual igualando la derivada parcial respecto de cada una de sus 8 variables a 0:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_1} = -\ln p_1 - 1 - \lambda + 2\xi = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_m} = -\ln p_m - 1 - \lambda = 0 \quad para\ 2 \leq m \leq 5 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_6} = -\ln p_1 - 1 - \lambda - \xi = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \lambda} = -\sum_m p_m + 1 = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi} = -p_6 + 2p_1 = 0 \tag{13}$$

Noten que las ecuaciones (12) y (13) simplemente nos recuerdan los vínculos que habíamos planteado originalmente, sólo que esta vez salieron naturalmente de maximizar $\tilde{S}$ respecto de los multiplicadores de Lagrange. Nos queda resolver el sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas. Por suerte, está bastante desacoplado. Lo primero que haremos es expresar a cada p_m en términos de los dos multiplicadores de Lagrange, utilizando las ecuaciones (9)-(11). Obtenemos que

$$p_1 = e^{-1-\lambda+2\xi} \tag{14}$$

$$p_m = e^{-1-\lambda} \quad para\ 2 \leq m \leq 5 \tag{15}$$

$$p_6 = e^{-1-\lambda-\xi} \tag{16}$$

Nos queda ahora hallar los valores de λ y ξ que garanticen los vínculos que establecimos, o lo que es lo mismo, utilizar las ecuaciones (12) y (13) del sistema de ecuaciones. Primero reemplazamos las expresiones halladas para cada p_1 y p_6 en (13)

$$e^{-1-\lambda-\xi} = 2e^{-1-\lambda+2\xi} \tag{17}$$

de donde podemos despejar que $\xi = -\frac{1}{3}\ln 2 \approx -0{,}231$. Por otro lado, reemplazando los p_m en (12), obtenemos

$$e^{-1-\lambda}\left(e^{2\xi} + 4 + e^{-\xi}\right) = 1 \tag{18}$$

de donde podemos despejar que

$$\lambda = \ln\left(e^{2\xi} + 4 + e^{-\xi}\right) - 1 \tag{19}$$

Si reemplazamos el valor calculado para ξ, obtenemos que

$$\lambda = \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 4 + \sqrt[3]{2}\right) - 1 \approx 0{,}773 \tag{20}$$

Ahora que conocemos los valores de los multiplicadores de Lagrange, podemos reemplazarlos en las expresiones de p_m (ecs. (14) a (16)) para obtener los valores de las mismas

$$p_1 = e^{-1-\lambda+2\xi} \approx 0{,}107 \tag{21}$$

$$p_m = e^{-1-\lambda} \approx 0{,}170 \quad para\ 2 \leq m \leq 5 \tag{22}$$

$$p_6 = e^{-1-\lambda-\xi} \approx 0{,}214 \tag{23}$$

Verifiquen que efectivamente todas las probabilidades sumen 1, y que $p_6 = 2p_1$.