Guía 2, problema 9

Guillem Pérez Nadal

Enunciado

En un partido de truco que dura 15 manos entre 4 jugadores, encuentre la probabilidad de que a un dado jugador nunca le toque el ancho de espadas, y de que el ancho de espadas no salga en todo el partido.

Resolución

Empecemos con la primera pregunta. Tenemos que averiguar la probabilidad P de que a un dado jugador nunca le toque el ancho de espadas. Esto es, que no le toque en ninguna de las 15 manos. Ahora, como en cada mano se barajan todas las cartas y se reparten de vuelta, saber que a nuestro jugador no le tocó el ancho de espadas en una mano dada no afecta a la probabilidad de que no le toque en otra mano. En otras palabras, los eventos "no le toca el ancho de espadas en la mano m" y "no le toca el ancho de espadas en la mano n" son independientes. Por lo tanto tenemos

$$P = p^{15}, \tag{1}$$

donde p es la probabilidad de que no le toque el ancho de espadas en una mano dada. Así pues, todo el tema está en calcular p. Vamos a ver varias formas de hacer eso. Antes que nada, fijémonos en algo importante: p es la probabilidad de que ninguna de las tres cartas entregadas a nuestro jugador en la mano elegida sea el ancho de espadas. Uno podría estar tentado de decir que entonces $p = p_1^3$, donde p_1 es la probabilidad de que una carta dada no sea el ancho de espadas. Pero eso es falso porque los eventos "la carta m no es el ancho de espadas" y "la carta n no es el ancho de espadas" no son independientes: si sé que la primera carta no es el ancho de espadas, entonces hay menos probabilidad de que tampoco lo sea la segunda (porque en medio no se barajan todas las cartas y se reparten de vuelta). Eso es especialmente claro si suponemos por un momento que la baraja tiene sólo dos cartas, una de las cuales es el ancho de espadas: si sé que la primera no era el ancho de espadas, entonces es imposible que tampoco lo sea la segunda.

Método 1. La primera forma de calcular p es directamente, es decir, contando casos favorables y casos posibles. El número de casos posibles es el número de formas de elegir 3 cartas de un mazo de 40, es decir $\binom{40}{3}$. Y el número de casos favorables es es el número de formas de elegir 3 cartas de un mazo de 39 (toda la baraja menos el ancho de espadas). Por lo tanto tenemos

$$p = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{37}{40}. \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) obtenemos $P = (37/40)^{15} \simeq 0.31$.

Método 2. Otra forma de pensarlo, más complicada pero instructiva, es usando probabilidad condicional. Para hacer eso, llamemos E_n, con $n = 1, 2, 3$, al evento “la carta n no es el ancho de espadas”. Tenemos

$$\begin{aligned} p &= P(E_3 \cap E_2 \cap E_1) = P(E_3|E_2 \cap E_1)P(E_2 \cap E_1) \\ &= P(E_3|E_2 \cap E_1)P(E_2|E_1)P(E_1) \end{aligned} \tag{3}$$

donde en la segunda igualdad y la tercera simplemente hemos usado la definición de la probabilidad condicional. Leyendo la última línea de derecha a izquierda, tenemos que p es la probabilidad de que la primera carta no sea el ancho de espadas, por la probabilidad de que la segunda carta no sea el ancho de espadas dado que la primera tampoco lo era, por la probabilidad de que la tercera carta no sea el ancho de espadas dado que ni la primera ni la segunda lo eran. Calculemos estas tres probabilidades. La primera es fácil,

$$P(E_1) = \frac{39}{40}, \tag{4}$$

porque tenemos 39 casos favorables y 40 posibles. Vamos a pensar la segunda, es decir, la probabilidad de que la segunda carta no sea el ancho de espadas dado que la primera tampoco lo era. La observación básica es la siguiente. Supongamos que sabemos que la primera carta no es el ancho de espadas. Si a ese dato le agregamos más información diciendo, por ejemplo, que la primera carta es el 7 de bastos, eso no modifica la probabilidad de que la segunda carta no sea el ancho de espadas (nos da igual cuál sea la primera carta). Así, si llamamos F_1 al evento “la primera carta es el 7 de bastos”, tenemos

$$P(E_2|E_1) = P(E_2|F_1) = \frac{38}{39} \tag{5}$$

porque, si sabemos que la primera carta es el 7 de bastos, en la segunda tenemos 39 casos posibles de los cuales todos menos uno son favorables. Argumentando exactamente de la misma forma obtenemos que la probabilidad de que la tercera carta no sea el ancho de espadas dado que ni la primera ni la segunda lo eran es

$$P(E_3|E_2 \cap E_1) = \frac{37}{38}. \tag{6}$$

Reemplazando estas tres probabilidades en la ecuación (3) obtenemos $p = 37/40$, igual que por el método 1.

Método 3. El tercer método (el más sencillo de todos) consiste en expresar la probabilidad p de que a nuestro jugador no le salga el ancho de espadas en una mano dada en términos de la probabilidad $\bar{p}$ de que sí le salga,

$$p = 1 - \bar{p}. \tag{7}$$

Ahora, $\bar{p}$ es la probabilidad de que o bien la primera carta sea el ancho de espadas, o bien lo sea la segunda, o bien lo sea la tercera. Estos tres eventos son disjuntos (¡no pueden ocurrir a la vez!) y por lo tanto se tiene

$$\bar{p} = \frac{1}{40} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{3}{40}, \tag{8}$$

donde hemos usado que la probabilidad de que una carta dada (ya sea la primera, la segunda o la tercera) sea el ancho de espadas es $1/40$. Acá alguien podría preguntar: ¿pero la probabilidad de que la segunda carta sea el ancho de espadas no debería ser $1/39$? ¡No! Eso sería la probabilidad de que la segunda carta sea el ancho de espadas dado que la primera no lo era, y lo que hay que poner en esta ecuación no es la probabilidad condicional sino la probabilidad a secas, que es la misma para las 3 cartas. Reemplazando este resultado en (7) obtenemos de vuelta $p = 37/40$, igual que por los dos métodos anteriores.

Consideremos ahora la segunda pregunta. Se nos pide la probabilidad P' de que el ancho de espadas no salga en todo el partido. Fíjense que esta pregunta es idéntica a la primera, salvo que en cada mano hay que considerar $3 \times 4 = 12$ cartas en lugar de tres. Si llamamos p' a la probabilidad de que el ancho de espadas no salga en una mano, por cualquiera de los tres métodos explicados arriba obtenemos $p' = 28/40$ y por lo tanto $P' = (28/40)^{15} \simeq 0.0047$. Moraleja: el ancho de espadas sale casi seguro.