Guía 4, problema 12

Guillem Pérez Nadal

Enunciado

Un gas de N partículas de espín $1/2$ ocupa un volumen V y está a temperatura 0. El sistema está aislado térmicamente. Mediante un tabique removible el volumen aumenta de V a $V + \Delta V$, con $\Delta V \ll V$. El gas se expande libremente hasta ocupar todo el volumen y finalmente llega a un nuevo equilibrio a temperatura T. Encuentre T asumiendo válida la aproximación de muy baja temperatura.

Resolución

En realidad, éste no es un problema de física estadística sino de termodinámica. Simplemente tenemos que usar las propiedades termodinámicas de un gas de Fermi-Dirac, que ya conocemos. Dado que la expansión es libre y adiabática, el calor y el trabajo se anulan y por lo tanto

$$\Delta E = 0. \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que la temperatura del estado inicial es 0 y la del estado final es baja, podemos usar la ecuación (50) del repaso de estadística cuántica,

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{3}{5} N \epsilon_F(V) \\ E_f &= \frac{3}{5} N \epsilon_F(V + \Delta V) \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left[\frac{T}{T_F(V + \Delta V)} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Habría sido mala idea partir de la ecuación (41) de ese mismo repaso, que da la energía en términos de z en lugar de N, porque la fugacidad no es dato de este problema, mientras que sí lo es el número de partículas. Igualando la energía inicial y la final obtenemos la temperatura,

$$T = T_F(V + \Delta V) \sqrt{\frac{12}{5\pi^2} \left[\frac{\epsilon_F(V)}{\epsilon_F(V + \Delta V)} - 1 \right]}. \tag{3}$$

Usemos ahora el dato de que $\Delta V \ll V$ para obtener una expresión más sencilla para la temperatura. De la expresión explícita de la energía de Fermi, ecuación

(47) del repaso de estadística cuántica, vemos que $\epsilon_F(V) \propto V^{-2/3}$. Esto implica que $\epsilon'_F(V) = -2\epsilon_F(V)/(3V)$, y por lo tanto

$$\epsilon_F(V + \Delta V) \simeq \epsilon_F(V) + \epsilon'_F(V)\Delta V = \epsilon_F(V)\left(1 - \frac{2\Delta V}{3V}\right). \tag{4}$$

Reemplazando en (3) vemos que, al orden más bajo en ΔV,

$$T = T_F(V)\sqrt{\frac{8}{5\pi^2}\frac{\Delta V}{V}}. \tag{5}$$

¡Y nada más, ésta es la solución! Podemos hacerla más explícita reemplazando la expresión explícita para la temperatura de Fermi; ahí aparece la degeneración de spin, que en este caso vale 2 porque las partículas tienen spin 1/2.

Recordemos que en la expansión libre de un gas ideal común no cambia la temperatura, porque la energía no depende del volumen. ¿Por qué cambió en este caso? Porque en este caso la energía sí depende del volumen, a través de la energía de Fermi, que disminuye con V. ¿Y a qué se debe eso? Bueno, al aumentar V aumenta la densidad de estados (ver la ecuación (28) del repaso de estadística cuántica), es decir, aumenta el número de estados de una partícula para cada energía. Por lo tanto, las partículas tienen más estados en los que acomodarse sin incrementar su energía y la máxima energía ocupada (es decir, la energía de Fermi) es menor.