

# Ejercicio 9 - Guía 4

Facundo Rost

Física Teórica 3 - 1er cuatrimestre 2020

## Resumen

En la sección 1, vemos en general como podemos obtener la densidad de estados en problemas con niveles de energía discretos, y las correcciones que hay que hacer al aproximar sumatorias por integrales de acuerdo a la fórmula de Euler-Maclaurin. En la sección 2 lo aplicamos en particular al inciso a del ejercicio 9 de la guía 4, que es un electrón moviéndose en un plano de área  $A$  sujeto a un campo magnético  $B$  normal al plano, y que si  $B \neq 0$  resulta un problema análogo a un oscilador armónico cuántico. Incluimos una subsección en la que analizamos el caso particular en el que  $B = 0$  y lo comparamos con el comportamiento del sistema si  $B \rightarrow 0$ . Por último, en la sección 3, resolvemos el inciso b de dicho ejercicio calculando la magnetización y la susceptibilidad magnética.

## Índice

<b>1. Aclaraciones previas: Densidad de estados con niveles de energía discretos y fórmula de Euler-Maclaurin</b>	<b>2</b>
<b>2. Inciso a: Aplicación al oscilador armónico cuántico</b>	<b>4</b>
2.1. Caso $B = 0$ . . . . .	7
<b>3. Inciso b: Magnetización y susceptibilidad magnética</b>	<b>9</b>

# 1. Aclaraciones previas: Densidad de estados con niveles de energía discretos y fórmula de Euler-Maclaurin

Como explicó Guillem en la sección 2 del apunte de repaso teórico de ésta guía, para estadística cuántica se aplica la ecuación (24) de su apunte:

$$\ln Z_{GC} = \sum_{i \in \text{estados}} \ln Z_i = \sum_{i \in \text{estados}} \pm \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i} \right) \quad (1)$$

donde los dos signos de la última expresión son el signo + si estamos estudiando fermiones, y son el signo - si estamos estudiando bosones (ver ecuación (22) del apunte de repaso teórico). En general, en problemas de estadística cuántica, vamos a partir de ésta ecuación.

En general, **lo que solemos hacer es reescribir (si es posible, sino se aproxima)**

$\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) = \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon)$ , **donde  $g(\epsilon)$  es la densidad de estados (es decir  $g(\epsilon)d\epsilon$  es la cantidad de estados con energía entre  $\epsilon$  y  $\epsilon + d\epsilon$ ), y se integra sobre**

**las posibles energías de los estados monoparticulares. Suponiendo que los niveles de energía son continuos** (las posibles energías de los estados se encuentran en un intervalo

continuo  $\epsilon \in [\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ ), **se puede reescribir** la sumatoria sobre los posibles estados por una

integral en el intervalo de las posibles energías (como hizo por ejemplo Guillem en la ecuación (27) de su apunte para el caso particular del gas ideal en dimensión 3). El hecho de que los niveles

de energía sean continuos significa en definitiva que la sumatoria sobre estados  $\sum_{i \in \text{estados}}$  es una integral (o varias) en las variables que determinan el estado (por ejemplo  $(q, p)$ ), y reescribirla como una sólo integral en las posibles energías es cuestión de integrar las variables que no son relevantes y hacer los cambios de variables necesarios (como hizo Guillem en la ecuación (27)).

Y por lo tanto, reescribimos la ecuación 1 por:

$$\ln Z_{GC} = \sum_{i \in \text{estados}} \pm \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i} \right) = \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) \left( \pm \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon} \right) \right) \quad (2)$$

para poder calcular el logaritmo de la función de partición gran canónica. Ésto es lo que hizo Guillem en las ecuaciones (25) y (26) de su apunte. Como veremos luego en la guía 5, en caso de que se tenga un sistema de bosones (y luego los dos signos sean  $-$ ), la anterior reescritura en términos de una integral en  $\int d\epsilon g(\epsilon)$  no es válida pues hay que sumar aparte en la anterior integral el término  $\ln Z_0$  que corresponde al estado fundamental (con mínima energía  $\epsilon_0$ ), pero no vamos a tener en cuenta ésto en este apunte.

Pero **en caso de que los niveles de energía sean valores discretos**  $\epsilon_i$  en el intervalo  $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ , **no se puede reescribir** la sumatoria sobre los posibles estados como una integral en las energías como se hizo anteriormente, ya que la sumatoria sobre los posibles estados es ahora una sumatoria sobre las variables que determinan el estado (que toman valores discre-

tos) y no una integral. Sin embargo igual se puede aproximar:  $\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) \simeq \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon)f(\epsilon)$  para una cierta densidad de estados  $g(\epsilon)$ .

La aproximación que se realiza en algún momento del razonamiento es aproximar una sumatoria por una integral, lo cual a simple vista puede parecer bruto, pero la fórmula de Euler-Maclaurin nos brinda correcciones de todo orden a esa aproximación y su resto <sup>1 2</sup>:

$$\sum_{n=n_0}^{n_f} f(n) = \int_{n_0}^{n_f} f(x) dx + \frac{f(n_f) + f(n_0)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n_f) - f^{(2k-1)}(n_0)) + R_{2p+1}, \quad (4)$$

donde  $B_{2k}$  son los números de Bernoulli y el resto  $R_{2p+1}$  viene dado por derivadas de  $f$  de orden impar mayor o igual a  $2p+1$ . Lo anterior es válido para todo  $p \in \mathbb{N}_0$ . Si sólo tenemos definida la función  $f(n)$  para los enteros entre  $n_0$  y  $n_f$  entonces la anterior fórmula es válida para cualquier función  $f(x)$  definida en el intervalo real  $[n_0, n_f]$  tal que  $f(x = n) = f(n)$  (o sea es válida para cualquier extensión de  $f(n)$  al intervalo real  $[n_0, n_f]$ ).

Supongamos que los estados monoparticulares vienen dados por niveles de energía discretos  $\epsilon_n$  (siendo  $n$  un número entero que toma valores entre  $n_0$  y  $n_f$ ) con degeneración  $g_n$  (es decir, que hay  $g_n$  estados distintos con energía  $\epsilon_n$ ). Entonces si sumamos en todos los estados monoparticulares una función  $f(\epsilon_{\text{estado } i})$  que sólo depende de la energía del estado, para cada nivel de energía  $\epsilon_n$  hay  $g_n$  términos en la sumatoria que son iguales, ya que representan estados que poseen esa energía. Lo cual nos permite escribir:

$$\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) = \sum_{n=n_0}^{n_f} g_n f(\epsilon_n) \quad (5)$$

Y si aplicamos entonces la fórmula de Euler-Maclaurin a la anterior expresión con  $h(n) \equiv g_n f(\epsilon_n)$ , podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) &= \sum_{n=n_0}^{n_f} g_n f(\epsilon_n) = \sum_{n=n_0}^{n_f} h(n) \\ &= \int_{n_0}^{n_f} h(x) dx + \frac{h(n_f) + h(n_0)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (h^{(2k-1)}(n_f) - h^{(2k-1)}(n_0)) + R_{2p+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

<sup>1</sup>ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Maclaurin\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Maclaurin_formula)

<sup>2</sup>A partir de ésta fórmula se pueden deducir diversas versiones útiles para ciertos casos particulares. Una de éstas versiones es la que se va a utilizar en el inciso a del presente ejercicio (de hecho fue sugerida en el enunciado): En caso de que  $n_0 = 0$ ,  $n_f = \infty$ ,  $f(n) = h(n + 1/2)$ , y además si  $f(\infty) = h(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$  y si  $f'(\infty) = h'(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = 0$ , entonces es válido que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n + 1/2) = \int_0^{\infty} h(x) dx + \frac{h'(0)}{24} + R_2 \simeq \int_0^{\infty} h(x) dx + \frac{h'(0)}{24} \quad (3)$$

donde el resto  $R_2$  viene dado por derivadas de orden mayor o igual a 2, y en el segundo paso de la ecuación anterior lo despreciamos.

donde se consideró una extensión de  $h(n)$  definida en los enteros entre  $n_0$  y  $n_f$ , a  $h(x)$  definida en todos los reales del intervalo  $[n_0, n_f]$ .

Podemos aplicar lo anterior para el cálculo de  $\ln Z_{GC} = \pm \sum_{i \in \text{estados}} \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i} \right)$ :

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= \sum_{i \in \text{estados}} \overbrace{\pm \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i} \right)}^{\equiv f(\epsilon_{\text{estado } i})} = \sum_{n=n_0}^{n_f} \overbrace{\pm g_n \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon_n} \right)}^{\equiv h(n)} = \sum_{n=n_0}^{n_f} h(n) \\ &= \int_{n_0}^{n_f} h(x) dx + \frac{h(n_f) + h(n_0)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (h^{(2k-1)}(n_f) - h^{(2k-1)}(n_0)) + R_{2p+1}, \end{aligned} \quad (7)$$

Donde para extender  $h(n)$  a  $h(x)$  (de los enteros entre  $n_0$  y  $n_f$  a los reales en el intervalo  $[n_0, n_f]$ ), extendemos  $g_n$  y  $\epsilon_n$  definidas en los enteros entre  $n_0$  y  $n_f$ , a  $g_x$  y  $\epsilon(x)$  (respectivamente) definidas en todos los reales del intervalo  $[n_0, n_f]$  (se denotó  $g_x$  para no confundir con la densidad de estados  $g(\epsilon)$  que es otra cosa).

Si hacemos el cambio de variable  $x \rightarrow \epsilon(x)$  (con  $d\epsilon = \epsilon'(x)dx$ ) en la anterior integral:

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= \sum_{i \in \text{estados}} \pm \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i} \right) \\ &= \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} h(x(\epsilon)) \frac{d\epsilon}{\epsilon'(x(\epsilon))} + \frac{h(n_f) + h(n_0)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (h^{(2k-1)}(n_f) - h^{(2k-1)}(n_0)) + R_{2p+1}, \\ &= \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} \frac{g_x(\epsilon)}{\epsilon'(x(\epsilon))} \left( \pm \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon} \right) \right) d\epsilon + \frac{h(n_f) + h(n_0)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (h^{(2k-1)}(n_f) - h^{(2k-1)}(n_0)) + R_{2p+1}, \\ &\simeq \int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} \underbrace{\frac{g_x(\epsilon)}{\epsilon'(x(\epsilon))}}_{= g(\epsilon)} \left( \pm \ln \left( 1 \pm ze^{-\beta\epsilon} \right) \right) d\epsilon + \frac{h(n_f) + h(n_0)}{2} + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (h^{(2k-1)}(n_f) - h^{(2k-1)}(n_0)) \end{aligned} \quad (8)$$

Donde en el último paso se despreció el resto  $R_{2p+1}$ . Luego, **podemos identificar la densidad de estados** del problema como  $g(\epsilon) = \frac{g_x(\epsilon)}{\epsilon'(x(\epsilon))}$ . **Sólo que, como estamos estudiando un problema con niveles de energía discretos y para pasar de una sumatoria a una integral utilizamos la fórmula de Euler-Maclaurin con correcciones, aparecen términos de correcciones que en el caso de niveles de energía continuos no aparecían (ver ecuación 2).**

## 2. Inciso a: Aplicación al oscilador armónico cuántico

El oscilador armónico cuántico unidimensional es un sistema que posee estados monoparticulares con energías discretas de la forma  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ , donde el número  $n$  toma valores enteros entre  $n_0 = 0$  y  $n_f = \infty$ .

En realidad el sistema que estudiamos es el de electrones (con masa  $m_e$  y carga  $-e$ ) moviéndose en un plano de área  $A$  sujetos a un campo magnético  $B$  normal al plano, pero se puede

demostrar <sup>3</sup> que **para  $B \neq 0$  sus niveles de energía son los mismos que los del oscilador armónico** ( $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ , donde el número  $n$  toma valores enteros entre  $n_0 = 0$  y  $n_f = \infty$ ) **sólo que poseen degeneración  $g_n = g$ . Donde  $\omega = \frac{eB}{m_e c}$  y  $g = \frac{2AeB}{hc}$ .**

Por lo tanto, podemos calcular el logaritmo de la función de partición como:

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= + \sum_{i \in \text{estados}} \ln \left( 1 + ze^{-\beta\epsilon_i} \right) = \sum_{n=n_0}^{n_f} \overbrace{g_n}^{=g} \ln \left( 1 + ze^{-\beta\epsilon_n} \right) \\ &= \sum_{n=n_0=0}^{n_f=\infty} g \underbrace{\ln \left( 1 + ze^{-\beta\hbar\omega(n + 1/2)} \right)}_{\equiv h(n+1/2)} = g \sum_{n=0}^{\infty} h(n + 1/2) \end{aligned} \quad (9)$$

donde puesto que se está estudiando un **sistema de fermiones (ya que son electrones con spin semientero 1/2)**, se tomaron ambos signos de la ecuación 1 como +.

Y **para aproximar la anterior sumatoria por una integral (con una cierta corrección), podemos utilizar la versión particular de la fórmula de Euler-Maclaurin sugerida en el enunciado del ejercicio (ver ecuación 3)**. Para ello consideramos que extendemos  $h(n + 1/2)$  a  $h(x) = \ln \left( 1 + ze^{-\beta\hbar\omega x} \right)$  definida en  $[0, \infty]$  (es decir, extendemos  $g_n = g \rightarrow g_x = g = \text{cte}$  y  $\epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2) \rightarrow \epsilon(x) = \hbar\omega x$ ), y que  $h(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + ze^{-\beta\hbar\omega x} \right) = \ln 1 = 0$  y que  $h'(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\beta\hbar\omega ze^{-\beta\hbar\omega x}}{1 + ze^{-\beta\hbar\omega x}} = 0$ :

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= g \sum_{n=0}^{\infty} h(n + 1/2) = g \left( \int_0^{\infty} h(x) dx + \frac{h'(0)}{24} + R_2 \right) \\ &\simeq g \int_0^{\infty} h(x) dx + g \frac{h'(0)}{24} \end{aligned} \quad (10)$$

donde el resto  $R_2$  viene dado por derivadas de orden mayor o igual a 2, y en el segundo renglón de la ecuación anterior lo despreciamos.

Notemos que podríamos expresar la anterior integral en  $dx$  como una integral en energías  $\epsilon = \hbar\omega x$  con un simple cambio de variable  $x \rightarrow \epsilon(x)$  (con  $d\epsilon = \hbar\omega dx$ ), obteniendo:

$$\begin{aligned} \ln Z_{GC} &= + \sum_{i \in \text{estados}} \ln \left( 1 + ze^{-\beta\epsilon_i} \right) \simeq g \int_0^{\infty} h(x) dx + g \frac{h'(0)}{24} = \int_0^{\infty} \frac{g}{\hbar\omega} h \left( \frac{\epsilon}{\hbar\omega} \right) d\epsilon + g \frac{h'(0)}{24} \\ &= \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{g}{\hbar\omega}}_{=g(\epsilon)} \ln \left( 1 + ze^{-\beta\epsilon} \right) d\epsilon + g \frac{h'(0)}{24} \end{aligned} \quad (11)$$

Luego, **podemos identificar la densidad de estados del problema:  $g(\epsilon) = \frac{g}{\hbar\omega}$** . Teniendo en cuenta que  $\omega = \frac{eB}{m_e c}$  y  $g = \frac{2AeB}{hc}$ , entonces podemos escribir la densidad de estados como:  
 $g(\epsilon) = \frac{g}{\hbar\omega} = \frac{2\pi g}{h\omega} = \frac{4\pi A m_e}{h^2}$ . Sólo que, como estamos estudiando un problema con niveles de

<sup>3</sup>Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Landau\\_quantization](https://en.wikipedia.org/wiki/Landau_quantization)

energía discretos y para pasar de una sumatoria a una integral utilizamos la fórmula de Euler-Maclaurin con una corrección de primer orden, **aparece un término de corrección**  $\frac{gh'(0)}{24}$  **que no aparece si los niveles de energía son continuos** (ver ecuación 2).

Si reemplazamos a  $h(x) = \ln(1 + ze^{-\beta\hbar\omega x})$  y a su derivada  $h'(x) = \frac{-\beta\hbar\omega ze^{-\beta\hbar\omega x}}{1 + ze^{-\beta\hbar\omega x}}$  (en particular:  $h'(0) = \frac{-\beta\hbar\omega z}{1 + z} = -\beta\hbar\omega \frac{1}{1 + z^{-1}}$ ) en la ecuación 10, y desarrollamos el cálculo, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{GC} &\simeq g \int_0^\infty h(x) dx + g \frac{h'(0)}{24} = g \int_0^\infty \ln(1 + ze^{-\beta\hbar\omega x}) dx - \frac{g}{24} \beta\hbar\omega \frac{1}{1 + z^{-1}} \\
&= g \left( \underbrace{x \ln(1 + ze^{-\beta\hbar\omega x}) \Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty x \frac{(-\beta\hbar\omega) ze^{-\beta\hbar\omega x}}{1 + ze^{-\beta\hbar\omega x}} dx \right) - \frac{g}{24} \beta\hbar\omega \frac{1}{1 + z^{-1}} \\
&= g \left( \int_0^\infty \frac{x}{z^{-1} e^{\beta\hbar\omega x} + 1} \beta\hbar\omega dx - \frac{1}{24} \beta\hbar\omega \frac{1}{1 + z^{-1}} \right) \\
&= g \left( \frac{1}{\beta\hbar\omega} \underbrace{\int_0^\infty \frac{y}{z^{-1} e^y + 1} dy}_{=\Gamma(2)I_2^+(z)=I_2^+(z)=f_2(z)} - \frac{1}{24} \beta\hbar\omega \frac{1}{1 + z^{-1}} \right) \\
&= g \left( \frac{f_2(z)}{\beta\hbar\omega} - \frac{1}{24} \beta\hbar\omega \frac{1}{1 + z^{-1}} \right) = g \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} f_2(z) - \frac{1}{24} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{1}{1 + z^{-1}} \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

Donde se utilizó en el primer renglón la ecuación 10 y se evaluó  $h(x)$  y  $h'(0)$ ; en el segundo renglón se aplicó partes  $\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$  con  $u(x) = x$  (cuya derivada es  $u'(x) = 1$ ) y  $v(x) = h(x) = \ln(1 + ze^{-\beta\hbar\omega x})$  (cuya derivada es  $v'(x) = h'(x) = \frac{(-\beta\hbar\omega)ze^{-\beta\hbar\omega x}}{1 + ze^{-\beta\hbar\omega x}}$ ), y también se utilizó que el término de borde es nulo ya que  $u(x = 0)v(x = 0) = 0$  (porque  $u(x) = x$  se anula en  $x = 0$ ) y además  $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + ze^{-\beta\hbar\omega x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + ze^{-\beta\hbar\omega x})}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-\beta\hbar\omega)ze^{-\beta\hbar\omega x}}{-x^{-2}(1 + ze^{-\beta\hbar\omega x})} = \beta\hbar\omega z \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-\beta\hbar\omega x} = \beta\hbar\omega z \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{\beta\hbar\omega x}} = z \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^{\beta\hbar\omega x}} = \frac{z}{\beta\hbar\omega} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{\beta\hbar\omega x}} = 0$ , donde se aplicó tres veces L'hospital; en el tercer renglón se reescribió el integrando que quedó después de hacer partes dividiendo por  $ze^{-\beta\hbar\omega x}$ ; en el cuarto renglón se realizó el cambio de variable  $x \rightarrow y = \beta\hbar\omega x$  con  $dy = \beta\hbar\omega dx$ , y se identificó la integral que quedó con la integral de Fermi  $\Gamma(2)I_2^+(z) = I_2^+(z) = f_2(z)$ ; y en el quinto y último renglón se escribió finalmente el resultado final, reemplazando  $\beta = (k_B T)^{-1}$ .

De ésta forma se dedujo el resultado que pedía el problema 9.

## 2.1. Caso $B = 0$

Si tomamos el límite  $B \rightarrow 0$  en la expresión 12 deducida anteriormente, considerando que  $\omega = \omega(B) = \frac{eB}{m_e c}$  y  $g = g(B) = \frac{2AeB}{hc}$  y luego que  $\omega(B) \rightarrow 0$  y que  $\frac{g(B)}{\omega(B)} = \frac{2Am_e \cancel{B}}{h \cancel{B}} = \frac{2Am_e}{h}$  no depende de  $B$  (aunque es indeterminado al evaluar  $B = 0$ , como es constante en  $B \neq 0$  se mantiene igual al hacer el límite  $B \rightarrow 0$ ), se tiene:

$$\lim_{B \rightarrow 0} \ln Z_{GC} = \lim_{B \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{g(B)}{\omega(B)} \frac{k_B T}{\hbar}}_{= \text{cte}} f_2(z) - \underbrace{\frac{1}{24} \frac{\hbar \omega(B) g(B)}{k_B T} \frac{1}{1+z^{-1}}}_{\propto B^2 \rightarrow 0} \right) = \frac{4\pi Am_e}{h^2} k_B T f_2(z) \quad (13)$$

notemos que al tomar dicho límite, la primera corrección de la fórmula de Euler-Maclaurin es nula.

Por otro lado, puesto que  $\frac{g(B)}{\omega(B)}$  es indeterminado al evaluar en  $B = 0$ ,  $\ln Z_{GC}$  **también es indeterminado al evaluar en  $B = 0$ : Sólo podemos calcular su límite cuando  $B \rightarrow 0$ , que es lo que hicimos en la ecuación anterior.** Si no esperamos que haya un salto abrupto en el comportamiento del sistema físico al pasar de un campo magnético no nulo  $B \neq 0$  a un campo magnético nulo  $B = 0$ , entonces  $\ln Z_{GC}$  en el caso  $B = 0$  debería coincidir con el límite  $\lim_{B \rightarrow 0} \ln Z_{GC} = \frac{4\pi Am_e}{h^2} k_B T f_2(z)$  calculado anteriormente. En caso de que no coincidan, es porque hay un salto abrupto y discontinuo en el comportamiento del sistema físico al pasar de  $B \neq 0$  a  $B = 0$ .

Para resolver el caso  $B = 0$  no tendría sentido plantear, como se hizo anteriormente en el caso  $B \neq 0$ , que los niveles de energía del sistema con  $B = 0$  son  $\epsilon_n = \hbar \omega(n + 1/2)$ , ya que como  $\omega = \omega(B = 0) = 0$  entonces tendríamos que el único nivel de energía válido sería  $\epsilon_n = 0$ .

Entonces **para resolver el caso  $B = 0$  hay que encarar el problema teniendo en cuenta desde el principio que  $B = 0$** : El sistema que estudiamos ahora es el de electrones (con masa  $m_e$ ) moviéndose en un plano de área  $A$  que no están sujetos a un campo magnético (o sea  $B = 0$ ). Por lo tanto, **el sistema que estamos estudiando** es el de electrones (que son fermiones) moviéndose libremente en un plano de área  $A$ : **Es un gas ideal de fermiones en dimensión  $d = 2$** , que posee un Hamiltoniano de la forma  $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}$ , y luego posee niveles de energía  $\epsilon(p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} = \epsilon(\|\vec{p}\|)$  continuos en  $[0, \infty)$ .

Luego, éste problema posee **niveles de energía continuos, por lo tanto hay que reescribir  $\ln Z_{GC}$  de acuerdo a la ecuación 2.** Entonces **necesitamos saber la densidad de estados  $g(\epsilon)$  de un gas ideal en dimensión  $d = 2$** : Queremos  $g(\epsilon)$  tal que

$\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) = \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon)$ . Y las variables que determinan el estado monoparticular de una de las partículas de nuestro sistema son: La proyección  $s_z$  del spin en  $z$ , y la posición de la partícula en el espacio de fases  $(\vec{q}, \vec{p}) = (q_1, q_2, p_1, p_2)$  de dimensión 4, luego sumar sobre los estados monoparticulares es sumar sobre los posibles valores de  $s_z$  e integrar en el espacio

de fases (con la medida de integración adimensionalizada al dividir por  $h^2$ ):

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_{\text{estado } i}) &= \sum_{s_z=-1/2}^{+1/2} \int \frac{d^2q d^2p}{h^2} f(\epsilon(\|\vec{p}\|)) = \overbrace{\left( \sum_{s_z=-1/2}^{+1/2} \right)}^{= g_s = 2} \overbrace{\left( \int d^2q \right)}^{= A} \frac{1}{h^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dp p f(\epsilon(p)) \\
&= 2A \frac{2\pi}{h^2} \int_0^\infty dp p f\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{4\pi A}{h^2} m_e \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon) = \int_0^\infty d\epsilon \underbrace{\frac{4\pi A m_e}{h^2}}_{= g(\epsilon)} f(\epsilon)
\end{aligned} \tag{14}$$

donde en el segundo paso, como la energía no depende de la proyección de spin  $s_z$ , la sumatoria en  $s_z$  aporta un factor  $g_s = 2s + 1$  que es la degeneración de spin (igual a los posibles valores de  $s_z$ ), siendo  $s$  el spin total de la partícula (en particular para el electrón,  $s = 1/2$  y  $g_s = 2/2 + 1 = 2$ ); y como la energía no depende de  $q$ , la integral en  $d^2q$  aporta un factor  $A$  igual al área en la que se pueden mover los electrones; y se utilizaron coordenadas polares para la integral en  $d^2p = d\theta dp p$  ya que  $f(\epsilon) = f(\epsilon(p))$  no depende de la coordenada angular. Por último, en el cuarto paso se realizó el cambio de variable  $p \rightarrow \epsilon(p) = \frac{p^2}{2m_e}$  con  $d\epsilon = \frac{p dp}{m_e} \iff p dp = m_e d\epsilon$ .

Y en el último paso **se identificó a la densidad de estados**  $g(\epsilon) = \frac{4\pi A m_e}{h^2}$ , que en efecto es constante en  $\epsilon$  y **coincide con la densidad de estados del inciso a con  $B \neq 0$**  (deducida de la ecuación 11).

Luego, **a partir de la densidad de estados** del sistema (gas ideal de electrones en  $d = 2$ ), **podemos deducir**  $\ln Z_{GC}$  **utilizando la ecuación 2 de forma exacta** (sin aproximaciones, ya que no hay que utilizar la fórmula de Euler-Maclaurin porque el sistema posee niveles de energía continuos):

$$\begin{aligned}
\ln Z_{GC}|_{B=0} &= \sum_{i \in \text{estados}} \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon_i}) = \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon}) \\
&= \int_0^\infty d\epsilon \frac{4\pi A m_e}{h^2} \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon}) = \frac{4\pi A m_e}{h^2} \int_0^\infty d\epsilon \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon}) \\
&= \frac{4\pi A m_e}{h^2} \left( \epsilon \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty d\epsilon \epsilon \frac{(-\beta) z e^{-\beta \epsilon}}{1 + z e^{-\beta \epsilon}} \right) \\
&= \frac{4\pi A m_e}{h^2} \int_0^\infty d\epsilon \beta \frac{\epsilon}{z^{-1} e^{\beta \epsilon} + 1} = \frac{4\pi A m_e}{h^2} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty dy \frac{y}{z^{-1} e^y + 1} \\
&= \frac{4\pi A m_e}{h^2} \frac{f_2(z)}{\beta} = \frac{4\pi A m_e}{h^2} k_B T f_2(z)
\end{aligned} \tag{15}$$

Las cuentas realizadas son totalmente análogas a las de la ecuación 12: Se integró por partes, se eliminó el término de borde, se realizó el cambio de variable  $\epsilon \rightarrow y = \beta \epsilon$ , y se identificó la integral de Fermi  $f_2(z)$  de la misma forma que en la ecuación 12.

Vemos que **éste resultado para  $\ln Z_{GC}|_{B=0}$ , obtenido a partir de plantear** desde el inicio del problema **que  $B = 0$  y estudiando luego un gas ideal de fermiones en dimensión  $d = 2$ , coincide perfectamente con el resultado que se obtuvo** en la ecuación 13 **al calcular el**

límite cuando  $B \rightarrow 0$  del resultado para  $\ln Z_{GC}$  de la ecuación 12 válido para  $B \neq 0$ . **Ésto nos dice en efecto que no hay ningún salto abrupto en el comportamiento del sistema físico al pasar de tener campo magnético no nulo  $B \neq 0$  a un campo magnético nulo  $B = 0$ : El comportamiento del sistema físico, dado por  $\ln Z_{GC}$ , es continuo en  $B = 0$  (no hay discontinuidades).**

Notar además que, siendo  $\lambda = \lambda(T) = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e k_B T}}$  la **longitud de onda térmica**, podemos expresar:  $\ln Z_{GC} = 2 \frac{A}{\lambda^2} f_2(z)$ , donde el factor 2 proviene de la degeneración de spin  $g_s = 2$ .

### 3. Inciso b: Magnetización y susceptibilidad magnética

A partir de  $\ln Z_{GC} = \frac{g(B)}{\omega(B)} \frac{k_B T f_2(z)}{\hbar} - g(B)\omega(B) \frac{1}{24} \frac{\hbar}{k_B T} \frac{1}{1+z^{-1}}$ , **derivando respecto a  $B$  podemos obtener la magnetización del sistema** ya que, como dice el enunciado:

$$M = k_B T \left. \frac{\partial \ln Z_{GC}}{\partial B} \right|_{A,T,z} = k_B T \left( \frac{k_B T f_2(z)}{\hbar} \overbrace{\left. \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{g(B)}{\omega(B)} \right) \right|_{A,T,z}}^{=0} - \frac{\hbar}{24 k_B T (1+z^{-1})} \left. \frac{\partial (g(B)\omega(B))}{\partial B} \right|_{A,T,z} \right)$$

$$= - \frac{h}{2\pi} \frac{2Ae^2}{24(1+z^{-1})} \frac{\partial(B^2)}{m_e \hbar c^2 \partial B} = - \frac{4Ae^2 B}{2\pi 24 m_e c^2} \frac{1}{1+z^{-1}} = - \frac{Ae^2 B}{12\pi m_e c^2} \frac{z}{z+1}$$
(16)

Aquí obtuvimos la magnetización  $M$  del gas en función de  $A, B, T$  y de  $z$ ; pero **el enunciado pedía obtener a  $M$  en función de  $A, B, T$  y de  $\bar{N}$**  (siendo  $\bar{N} = \langle N \rangle$ , el valor medio del número de partículas en el ensamble). Para lo cual, **necesitaremos expresar  $z$  en términos de  $\bar{N}$  para reemplazarlo en la anterior expresión. Y para lograr ésto, podemos calcular  $\bar{N}$  a partir de la función de partición del gran canónico** (ver ecuación (38) del apunte <http://materias.df.uba.ar/ft3a2020c1/files/2020/04/Maximizaci%C3%B3n-de-entrop%C3%ADa-e-introducci%C3%B3n-a-ensambles-version2.pdf>):

$$\begin{aligned} \bar{N} &= z \left. \frac{\partial (\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_{\beta} = \frac{g(B)}{\omega(B)} \frac{k_B T}{\hbar} z f_2'(z) - g(B)\omega(B) \frac{1}{24} \frac{\hbar}{k_B T} z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{z+1} \right) \\ &= \frac{g(B)}{\omega(B)} \frac{k_B T}{\hbar} f_1(z) - g(B)\omega(B) \frac{1}{24} \frac{\hbar}{k_B T} z \frac{(z+1) - z}{(z+1)^2} \\ &= \frac{g(B)}{\omega(B)} \frac{k_B T}{\hbar} \ln(1+z) - g(B)\omega(B) \frac{1}{24} \frac{\hbar}{k_B T} \frac{z}{(z+1)^2} \\ &= \underbrace{\frac{2Am_e}{h} \frac{2\pi k_B T}{h}}_{= 2A/\lambda^2} \ln(1+z) - \frac{2Ae^2 B^2}{m_e \hbar c^2} \frac{\hbar}{24 k_B T} \frac{z}{(z+1)^2} \end{aligned}$$
(17)

donde se utilizó que  $z I_\nu'(z) = I_{\nu-1}(z)$  y se utilizó en particular la expresión de  $f_1(z) = \ln(1+z)$  (es la única que se puede expresar en términos de funciones elementales). También se utilizó la

expresión de la longitud de onda térmica  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e k_B T}}$ .

Pero, como el problema pide **quedarse a primer orden en  $B$** , podemos luego despreciar el segundo término de la ecuación anterior, ya que es de orden  $B^2$ , obteniendo:

$$\bar{N} = \frac{2A}{\lambda^2} \ln(1+z) + \mathcal{O}(B^2) \iff z = \left( e^{\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} - 1 \right) \overbrace{e^{\mathcal{O}(B^2)}}^{=1+\mathcal{O}(B^2)} = e^{\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} - 1 + \mathcal{O}(B^2) \quad (18)$$

Entonces, podemos reemplazar ésta expresión de  $z$  en términos de  $\bar{N}$  en la ecuación 16, obteniendo:

$$\begin{aligned} M &= -\frac{Ae^2B}{12\pi m_e c^2} \frac{z}{z+1} = -\frac{Ae^2B}{12\pi m_e c^2} \left( \frac{e^{\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} - 1}{e^{\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}}} + \mathcal{O}(B^2) \right) \\ &= -\frac{Ae^2B}{12\pi m_e c^2} \left( 1 - e^{-\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} \right) + \mathcal{O}(B^3) \end{aligned} \quad (19)$$

**Ahora sí obtuvimos la magnetización  $M$  en función de  $A, B, T$  y de  $\bar{N}$ .** Si dividiésemos por  $A$ , obtendríamos la magnetización por unidad de área  $M/A = -\frac{e^2B}{12\pi m_e c^2} \left( 1 - e^{-\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} \right) + \mathcal{O}(B^3)$ .

Finalmente, **podemos obtener la susceptibilidad magnética derivando lo anterior respecto de  $B$** :

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{T, A, \bar{N}} = -\frac{e^2B}{12\pi m_e c^2} \left( 1 - e^{-\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} \right) + \mathcal{O}(B^2) \quad (20)$$

Obtuvimos la susceptibilidad  $\chi$  en función de  $A, B, T$  y de  $\bar{N}$ . Si dividiésemos por  $A$ , obtendríamos la susceptibilidad magnética por unidad de área  $\chi/A = -\frac{e^2}{12\pi m_e c^2} \left( 1 - e^{-\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} \right) + \mathcal{O}(B^2)$ . Notar en particular que  $\chi < 0$ , lo cual significa que el material es diamagnético.

Notar que  **fue necesario el paso de poner a  $M$  en función de  $T, A, B$  y  $\bar{N}$  para calcular la susceptibilidad magnética, ya que ésta es la derivada de  $M$  respecto de  $B$  a  $T, A, \bar{N}$  constantes.**

Por último, notar que  $\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A} = \frac{\lambda^2}{2a}$  donde  $a \equiv A/\bar{N}$  es el área por partícula. El factor  $\left( 1 - e^{-\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} \right)$  es el que determina la dependencia en  $T$ . En caso de que el sistema posea  $T$  muy alta (y luego  $\lambda = \lambda(T)$  pequeño):  $\lambda^2/(2a) \ll 1$  y luego  $\left( 1 - e^{-\frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}} \right) \simeq 1 - \left( 1 - \frac{\bar{N}\lambda^2}{2A} \right) = \frac{\bar{N}\lambda^2}{2A}$ .