

# Guía 5, Problema 6

Juan Schmidt

## Enunciado

La condensación de Bose-Einstein fue experimentalmente obtenida por primera vez en 1995, confinando a las partículas mediante potenciales armónicos. Suponga que las partículas están atrapadas en un potencial de la forma  $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ . Los estados de una partícula están dados entonces por 3 números,  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ , enteros mayores o iguales que cero, y la energía de cada estado es

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z). \quad (1)$$

(El cero de energía se ha redefinido para anular la energía del nivel fundamental.)

(a) Escriba el número medio de partículas como una suma sobre los estados de una partícula. Ignorando por ahora los problemas asociados al nivel fundamental, ¿qué condición debe pedirse para poder aproximar la suma por una integral?

(b) La manera más directa de transformar la suma en una integral consiste en escribir una integral para cada una de las sumatorias, sobre  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ , respectivamente. La integral tridimensional resultante involucra una función de  $n_x + n_y + n_z$ , y puede reescribirse de manera más sencilla observando que el integrando es constante sobre planos de la forma  $n_x + n_y + n_z = c$ , que en el octante  $n_x, n_y, n_z > 0$  definen triángulos equiláteros de lado  $c$ , con normal  $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ . Calcule el volumen infinitesimal que corresponde a cada triángulo en términos de  $c$  y  $dc$  y reescriba la integral como una integral sobre  $c$ . Finalmente, escriba todo en términos de alguna de las funciones  $g_\nu(z)$ .

(c) Un método alternativo para escribir  $N$  surge de observar que el mismo cambio de variables  $c = n_x + n_y + n_z$  hecho en la integral triple del ítem anterior podría haber sido hecho antes de pasar de la suma a la integral. En otras palabras, en lugar de sumar sobre  $n_x$ ,  $n_y$  y  $n_z$ , podría haberse sumado sobre niveles de energía  $M_0$ , incluyendo una multiplicidad. Calcule el número de estados de una partícula con una dada energía  $m\hbar\omega$  y reescriba la suma sobre estados como una suma sobre  $M_0$ . Puesto que se tiene una suma en lugar de tres, el paso a la integral lleva directamente a una integral unidimensional. Reobtenga así el resultado del ítem anterior.

(d) Cuando el potencial químico se aproxima arbitrariamente a la energía del nivel fundamental, el número de partículas en dicho estado se vuelve macroscópico: ¿por qué? Calcule bajo esas condiciones cuántas partículas se encontrarán por encima del nivel fundamental.

(e) Halle la temperatura crítica y discuta el límite termodinámico.

(f) Calcule la energía del gas para temperaturas por debajo de la crítica.

## Repasito

A estas alturas ya tendrán bastante claro que los sistemas de bosones o fermiones generalmente conviene tratarlos en el ensamble grancanónico. A mi me gusta pensar a cada uno de los distintos estados energéticos que puede tomar una partícula individual como si fuera un subsistema diferente. Por ejemplo si cada partícula puede estar en el estado  $A$ ,  $B$  o  $C$ , entonces pensamos que tenemos un subsistema  $A$  que puede contener  $n_A$  partículas (que en el fondo serán las partículas que eligen estar en el estado  $A$ ), un subsistema  $B$  que puede contener  $n_B$  partículas, y un subsistema  $C$  que puede contener  $n_C$  partículas, y que estos subsistemas (o estados) pueden intercambiar partículas entre ellos. En el caso de Fermiones cada subsistema (estado) puede contener 0 o 1 partícula, mientras que para Bosones cada subsistema (estado) puede contener un número entero de partículas entre 0 e  $\infty$ .

Si las partículas no interactúan, entonces cada estado (subsistema) es independiente de los demás, y aunque las partículas sean indistinguibles, los estados son distinguibles. Esto nos da la pauta de que podemos factorizar  $Z_{GC}$  en varias  $Z_{GC,i}$  asociadas a cada uno de los estados.

Para un sistema cualquiera de Bosones no interactuantes, podemos escribir la función de partición de cada estado como

$$Z_{GC,i} = \sum_{n_i=0}^{\infty} z^{n_i} e^{-\beta \epsilon_i n_i} = \frac{1}{1 - z e^{-\beta \epsilon_i}} \quad (2)$$

donde hicimos sólo la sumatoria sobre número de partículas  $n_i$  y no sobre estados, ya que estamos considerando un subsistema con un único estado  $i$  con  $\epsilon_i$ . La  $Z_{GC}$  de todo el sistema será una productoria de las  $Z_{GC,i}$  de los distintos estados

$$Z_{GC} = \prod_i \frac{1}{1 - z e^{-\beta \epsilon_i}} \quad (3)$$

Pero, como lo que más nos interesa siempre es el logaritmo de la función de partición, veamos que este vale

$$\ln Z_{GC} = - \sum_i \ln \left( 1 - z e^{-\beta \epsilon_i} \right) \quad (4)$$

Dado que en este ejercicio nos interesa principalmente el número de partículas, obtengámoslo a partir de  $\ln Z_{GC}$

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial \ln Z_{GC}}{\partial z} = \sum_i \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \epsilon_i} - 1} = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} = \sum_i n_{BE} \quad (5)$$

Por último, recordemos que para que  $n_{BE} \geq 0$ , necesitamos que  $\mu \leq \min(\epsilon_i)$ . Si definimos el cero de energía en el valor del estado fundamental, es decir  $\min(\epsilon_i) = 0$ , la cota que pusimos para  $\mu$  implica que  $z \leq 1$ . Además sabemos que  $z = e^{\beta \mu}$  por definición es positivo con lo cual  $0 < z \leq 1$ .

## Resolución

(a) En la ec (5), la sumatoria sobre  $i$  se refiere a los estados de una partícula. En nuestro problema, cada estado está definido por la terna de números de excitación  $(n_x, n_y, n_z)$ . Esto implica que para sumar sobre estados  $i$  tenemos que escribir una triple sumatoria

$$\langle N \rangle = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \hbar \omega(n_x + n_y + n_z)} - 1} \quad (6)$$

Para poder aproximar una sumatoria por una integral, necesitamos que la función que estamos sumando cambie muy poco en cada paso de la sumatoria. Pongamos como primer ejemplo una función de una variable  $f(n)$ , que la sumamos sobre un  $n$  que va saltando de a uno, representado en la figura 1. Vamos a pedir que  $\Delta f \ll f(n_0)$

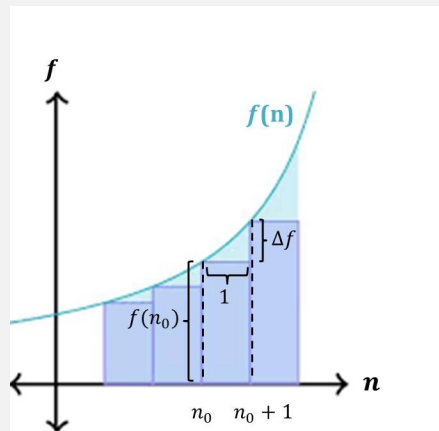


Figura 1

Si  $f(n)$  varía de forma suficientemente suave, podemos estimar  $\Delta f \approx f'(n_0) \Delta n = f'(n_0)$  (ya que  $\Delta n$  es 1 para cada paso). Por lo tanto, si  $f'(n_0) \ll f(n_0)$  entonces la sumatoria (sombreada en celeste) se parecerá mucha a la integral bajo la curva (sombreada en turquesa).

Si tenemos una función de varias variables  $f(n_1, n_2, \dots)$ , el cambio de  $f$  en cada paso lo podemos estimar como

$$\Delta f \approx \nabla f \cdot \Delta \mathbf{n} \quad (7)$$

que vale como máximo  $|\nabla f|$  ya que  $|\Delta \mathbf{n}| = 1$  en cada paso. Por ende, para aproximar la sumatoria por la integral multiple, vamos a pedir que

$$|\nabla f| \ll f \quad (8)$$

En nuestro caso particular tenemos

$$f(n_x, n_y, n_z) = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \hbar \omega (n_x + n_y + n_z)} - 1} \quad (9)$$

para la cual la condición de la ec (8) se traduce a

$$\frac{\beta \hbar \omega}{1 - z e^{-\beta \hbar \omega (n_x + n_y + n_z)}} \ll 1 \quad (10)$$

El caso más jugado es cuando  $(n_x + n_y + n_z)$  es mínimo, ya que el miembro izquierdo de la desigualdad toma su máximo valor. Haciendo caso al enunciado, vamos a olvidarnos por el momento del estado fundamental, es decir, el que tiene  $(n_x + n_y + n_z) = 0$ , con lo cual el caso más jugado será cuando  $(n_x + n_y + n_z) = 1$

$$\frac{\beta \hbar \omega}{1 - z e^{-\beta \hbar \omega}} \ll 1 \quad (11)$$

Si la desigualdad se cumple para este caso, entonces va a estar también garantizada para el resto de los valores de  $(n_x, n_y, n_z)$ . Para temperaturas suficientemente altas  $kT \gg \hbar \omega$ , lo cual equivale a decir  $\beta \hbar \omega \ll 1$ , se cumplirá la condición (11). Recuerden que  $0 < z \leq 1$ . Por lo tanto en ese límite, e ignorando lo que ocurra en el estado fundamental, podemos aproximar al número de partículas como

$$\langle N \rangle = \int \int \int dn_x dn_y dn_z \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \hbar \omega (n_x + n_y + n_z)} - 1} \quad (12)$$

(c) Tanto este inciso como el (b) piden obtener  $\langle N \rangle$  de formas alternativas. En mi opinión, es más recomendable que entiendan el procedimiento del (c), ya que se adecuaba mejor a las herramientas que hemos estado usando en esta materia. Una vez resuelto este inciso, el inciso (b) será sólo una alternativa matemática, pero no nos aportará nada nuevo sobre la física. Por eso, lo saltaremos para no perder el hilo ni los conceptos importantes, y dejaré su resolución recién al final del problema para quienes tengan curiosidad.

Para este inciso, vamos a partir de la ecuación (6), previo a la aproximación por la triple integral. Dado que la función que estamos sumando depende solo de la suma  $M_0 = n_x + n_y + n_z$ , intentemos reescribir la expresión en términos de una única sumatoria respecto de esa variable relevante. Hay que tener cuidado de que hay varios estados  $(n_x, n_y, n_z)$  compatibles con cada valor de  $M_0$  que elijamos.

Lo que haremos les deberá recordar a la resolución del problema 2 de la guía 3, cuando resolvimos un sistema de osciladores en el ensamble microcanónico. Al igual que en aquel problema, nosotros al fijar  $M_0$  estamos fijando el número total de excitaciones, pero no como estas se reparten. En este caso, las excitaciones pueden repartirse entre cada una de las direcciones  $x$ ,  $y$  o  $z$ . Para esto vamos usar la analogía de como repartir  $M_0$  bolitas indistinguibles en 3 cajas distinguibles. De acuerdo con el problema 5 de la guía 2, la cantidad de formas en que podemos realizar esto es

$$\Omega(M_0) = \frac{(M_0 + 3 - 1)!}{M_0!(3 - 1)!} = \frac{(M_0 + 2)(M_0 + 1)}{2} = \frac{1}{2} M_0^2 + \frac{3}{2} M_0 + 1 \quad (13)$$

Por lo tanto, si para calcular  $\langle N \rangle$  sumamos sobre  $M_0$  en lugar de la triple sumatoria, hay que tener en cuenta esta multiplicidad de estados para cada  $M_0$

$$\langle N \rangle = \sum_{M_0=0}^{\infty} \frac{\Omega(M_0)}{z^{-1} e^{\beta \hbar \omega M_0} - 1} \quad (14)$$

obteniendo

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} \sum_{M_0=0}^{\infty} \frac{M_0^2}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega M_0} - 1} + \frac{3}{2} \sum_{M_0=0}^{\infty} \frac{M_0}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega M_0} - 1} + \sum_{M_0=0}^{\infty} \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega M_0} - 1} \quad (15)$$

Como ya dijimos en el inciso (a), para poder aproximar estas sumatorias por una integral (en este caso simple), pediremos que  $\beta\hbar\omega \ll 1$ . En tal caso tendremos que

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dM_0 \frac{M_0^2}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega M_0} - 1} + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} dM_0 \frac{M_0}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega M_0} - 1} + \int_0^{\infty} dM_0 \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega M_0} - 1} \quad (16)$$

Si hacemos un cambio de variables para llamar  $t = \beta\hbar\omega M_0$ , obtenemos

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} \int_0^{\infty} dt \frac{t^2}{z^{-1}e^t - 1} + \frac{3}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} \int_0^{\infty} dt \frac{t}{z^{-1}e^t - 1} + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)} \int_0^{\infty} dt \frac{1}{z^{-1}e^t - 1} \quad (17)$$

Acá podemos reconocer la aparición de las funciones  $g_\nu(z)$

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} \Gamma(3)g_3(z) + \frac{3}{2} \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2} \Gamma(2)g_2(z) + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)} \Gamma(1)g_1(z) \quad (18)$$

Recordemos que para números enteros  $\Gamma(\nu) = (\nu - 1)!$ . Por otro lado, nos quedaremos únicamente con el primer término ya que este será el dominante en el límite en que  $\beta\hbar\omega \ll 1$ . Nuestro resultado entonces queda

$$\langle N \rangle = \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(z) \quad (19)$$

(d) En este inciso analizaremos lo que ocurre cuando  $\mu \rightarrow 0$ , dado que dijimos que definíamos el 0 en la energía del estado fundamental. En dicho límite, la fugacidad  $z$  se acerca a su límite superior que es 1 como dijimos en el repaso. Acá recordemos que las funciones  $g_\nu(z)$  son crecientes, por lo cual, en el límite  $z \rightarrow 1$ ,  $g_3(z)$  se aproxima a su valor máximo que es  $g_3(1) \approx 1, 2$ .

Noten que la ec (19) pareciera estar poniendo una cota superior al número de partículas del sistema:

$$\langle N \rangle \leq \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} 1, 2 \quad (20)$$

pero ¿qué ocurre si queremos un sistema a esa misma temperatura con más partículas que dicha cota? ¿Estaría prohibido? No. La cuestión es que habíamos analizado la condición (8) para poder aproximar sumatoria por integral, dejando de lado el estado fundamental. Veamos que cuando  $z = 1$  y  $(n_x + n_y + n_z) = 0$ , la condición no se cumple. De hecho, el primer término de la sumatoria (6) diverge, y el segundo no, con lo cual la diferencia entre los primeros dos escalones en la figura (1) sería infinita!

Por eso, al considerar  $z \rightarrow 1$ , hay que tratar al primer término aparte, y aproximar el resto de la sumatoria por una integral. Si repetimos el inciso (c) con ese cuidado, obtenemos

$$\langle N \rangle = \frac{1}{z^{-1} - 1} + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(z) \quad (21)$$

donde el primer término corresponde al número de partículas en el estado fundamental, y el segundo término al número de partículas en los estados excitados. La cota que habíamos encontrado entonces no era una cota para la cantidad de partículas que puedo tener en mi sistema, sino más bien para la cantidad de partículas que puedo tener *en estados excitados*.

Para responder a la pregunta del inciso, recordemos otra propiedad de las  $g_\nu$ : cuando  $z$  es chico, podemos aproximar  $g_\nu(z) \approx z$ . Además podemos despreciar el 1 en el denominador del primer término, obteniendo

$$\langle N \rangle = z + \frac{z}{(\beta\hbar\omega)^3} \quad (22)$$

En ese caso, el primer término (correspondiente al número de partículas en el estado fundamental) es despreciable con respecto al segundo ya que habíamos establecido que  $\beta\hbar\omega \ll 1$ . Sin embargo, a

medida que  $z$  se aproxima a 1, esto deja de ocurrir, ya que el primer término de ec (21) se acerca a una divergencia, mientras el segundo se mantiene acotado. Por lo tanto en algún punto, el número de partículas en el estado fundamental se vuelve macroscópico, es decir comparable al número de partículas en el resto de los niveles. En esta situación es que diremos que tenemos un *condensado de Bose-Einstein*

(e) ¿Qué tanto debe aproximarse  $z$  a 1 para que el número de partículas en el estado fundamental  $N_0$  se vuelva apreciable macroscópicamente? Lo que buscamos es que  $N_0 = \frac{1}{z^{-1}-1} \sim 10^{23}$ . Esto ocurrirá cuando  $z = 1 - 10^{-23}$ , es decir  $z = 0,99999\dots$  con 23 nueves. A efectos de  $g_3$  es prácticamente como reemplazar  $z = 1$ . A efectos de  $1/(z^{-1}-1)$  no, ya que esta función será muy sensible a dichos cambios, por estar próxima a la divergencia. Por esta razón, cuando tengamos un condensado de Bose, y por ende un  $N_0$  macroscópico, podemos aproximar la ec (21) por

$$N \approx \frac{1}{z^{-1}-1} + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(1) \quad (23)$$

Podemos definir la frontera entre tener o no tener un condensado de Bose, como el momento en que el número de partículas totales del sistema satura la cota para el número de partículas en estados excitados, es decir

$$N = N_{exc} = \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3} g_3(1) \quad (24)$$

Esta expresión nos relaciona la temperatura y el número de partículas que hay en este caso crítico. De aquí podemos despejar la temperatura y denominarla  $T_C$

$$T_C = \frac{\hbar\omega}{k} \left( \frac{N}{g_3(1)} \right)^{1/3} \quad (25)$$

Por debajo de esta temperatura podemos decir que el exceso de partículas se encontrará en el nivel fundamental

$$N_0 = N - N_{exc} = N - \left( \frac{kT}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(1) \quad (26)$$

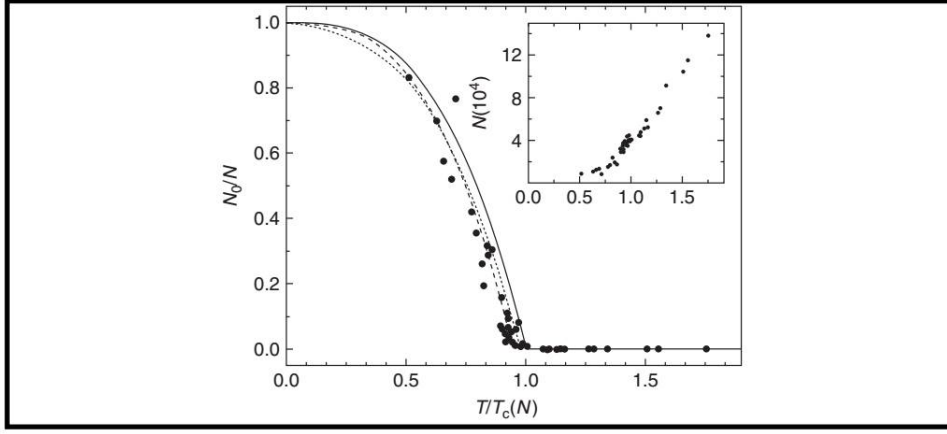
Esta misma expresión la podemos expresar en términos de  $T_C$  usando la ec (25)

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^3 \quad (27)$$

Esta expresión no vale para  $T \rightarrow 0$  ya que para obtenerla supusimos que  $\beta\hbar\omega \ll 1$ , lo cual dejará de valer por debajo de la temperatura  $T_0 = \hbar\omega/k$  que es mucho menor a  $T_C$  en el límite termodinámico ( $N \gg g_3(1) \approx 1, 2$ ).

Por otro lado la expresión (27) tampoco vale para  $T > T_C$  ya que nos daría un número negativo de partículas en el estado fundamental. Para  $T > T_C$  diremos que  $N_0/N \approx 0$  en el límite termodinámico, ya que  $z$  no es lo suficientemente cercano a 1. Es decir, para  $T > T_C$  corresponde utilizar la aproximación dada por (22) en lugar de la aproximación dada por (23).

En la figura 2 podemos comparar la dependencia predicha por la ec (27) con mediciones experimentales. Esta figura la tomé del Pathria, capítulo 7, sección 7.2 en donde se discute este mismo problema.



**FIGURE 7.7** Experimental measurement of the Bose-condensed fraction vs. temperature, as compared to equation (8). The scaled temperature on the horizontal axis is the temperature divided by the  $N$ -dependent critical temperature given in equation (6). The inset shows the total number of atoms in the trap after the evaporative cooling. From Ensher et al. (1996). Reprinted with permission; copyright © 1996, American Physical Society.

Figura 2

(f) Si derivamos  $\ln Z_{GC}$  de la ec (4) respecto de  $\beta$  obtenemos una expresión para la energía interna del sistema, similar a la ec (6)

$$U = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \frac{\hbar\omega(n_x + n_y + n_z)}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega(n_x+n_y+n_z)} - 1} \quad (28)$$

Acá vemos que el término asociado al estado fundamental vale 0, con lo cual no aporta a la energía total, y podemos aproximar a la sumatoria completa por la integral.

Para hacer eso, nuevamente convertimos a la triple sumatoria en una sumatoria sobre  $M_0$  teniendo en cuenta la multiplicidad  $\Omega(M_0)$ , y luego la aproximamos por una integral

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dM_0 \frac{\hbar\omega M_0^3}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega M_0} - 1} \quad (29)$$

Realizando otra vez el cambio de variables  $t = \beta\hbar\omega M_0$  obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{(\beta\hbar\omega)^4} \int_0^{\infty} dt \frac{t^3}{z^{-1}e^t - 1} = \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{(\beta\hbar\omega)^4} \Gamma(4)g_4(z) = \frac{3\hbar\omega}{(\beta\hbar\omega)^4} g_4(z) \quad (30)$$

Dado que estamos por debajo de  $T_C$ ,  $N_0$  es macroscópico, con lo cual podemos aproximar el  $z$  que está en el argumento de  $g_4$  por 1. Así obtenemos

$$U = \frac{3\hbar\omega}{(\beta\hbar\omega)^4} g_4(1) \quad (31)$$

Notar que para  $T < T_C$ , la energía  $U$  no depende del número total de partículas  $N$ , ya que al agregar partículas al sistema, estas se ubicarán en el estado fundamental que no aporta energía al sistema.

¿Significa entonces que obtuvimos una energía que no es extensiva? No. En nuestro caso podemos pensar que obtuvimos una expresión  $U(T, V, \lambda N)$ . Será extensiva en la medida que  $U(T, \lambda V, \lambda N) = \lambda U(T, V, N)$ . ¿Cómo hacemos para aumentar el volumen del sistema además del número de partículas?

El volumen de este sistema no está definido por paredes rígidas, sino más bien por el ancho que tenga el potencial armónico en el que colocamos a las partículas. Cualitativamente, cuanto mayor sea  $\omega$  más angosta será la parábola  $V = \frac{m\omega^2}{2}r^2$  del potencial, y por ende, menor volumen tendrá el sistema. Podemos ver en la última expresión que escribimos, que al disminuir  $\omega$  (es decir, aumentar el volumen del sistema), aumenta la energía. Esto ocurre ya que al disminuir  $\omega$  aumenta el límite de partículas que puedo colocar en estados excitados (ver ec (20)), y estas partículas son las que aportan energía al sistema.

## Extra

(b) Para este inciso, en cambio, nos proponen arrancar desde la triple integral de la ec (12). Como aclara el inciso, la función que queremos integrar depende sólo de  $n_x + n_y + n_z$ , con lo cual nos conviene hacer un cambio de variables en donde  $c = n_x + n_y + n_z$  sea una de las variables de integración. Pero ¿Cuáles serán las otras dos nuevas variables de integración? Eso importa poco, porque nuestra función a integrar no dependerá de esas otras variables. Pero algo importa, porque recuerden que al hacer un cambio de variables en una integral, hay que incluir el Jacobiano.

Empecemos eligiendo a nuestras nuevas variables de integración como  $a = n_x$ ,  $b = n_y$  y  $c = n_x + n_y + n_z$ . En este caso, el cambio de variables está definido por la siguiente función de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(a, b, c) = (n_x, n_y, n_x + n_y + n_z) \quad (32)$$

Para escribir el Jacobiano, primero escribimos la matriz diferencial, en donde la primera columna corresponde a  $a$ , la segunda a  $b$  y la tercera a  $c$ . En cada fila derivamos respecto de  $n_x$ ,  $n_y$  o  $n_z$ .

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial n_x} & \frac{\partial b}{\partial n_x} & \frac{\partial c}{\partial n_x} \\ \frac{\partial a}{\partial n_y} & \frac{\partial b}{\partial n_y} & \frac{\partial c}{\partial n_y} \\ \frac{\partial a}{\partial n_z} & \frac{\partial b}{\partial n_z} & \frac{\partial c}{\partial n_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33)$$

con lo cual el Jacobiano  $J = |\det(\mathbf{D})| = 1$  en este caso, lo cual nos resulta muy cómodo. Nuestra nueva integral será simplemente

$$\langle N \rangle = \int \int \int da db dc \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega c} - 1} \quad (34)$$

Hay que tener un poquito de cuidado con los límites de integración en estas nuevas variables. Esto se debe a que  $n_x + n_y + n_z = c$ , y ahora los primeros dos términos los cambiamos de nombre a  $a$  y  $b$ , con lo cual  $a + b + n_z = c$ . Como  $n_z \geq 0$ , entonces  $0 \leq a + b \leq c$ . Esto nos permitiría escribir explícitamente los nuevos límites de integración

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty dc \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega c} - 1} \int_0^c da \int_0^{c-a} db \quad (35)$$

donde mandé las integrales respecto de  $a$  y de  $b$  al fondo, ya que la función a integrar no depende de ninguna de ellas. Estas dos integrales corresponden al área del triángulo que muestra la figura 3

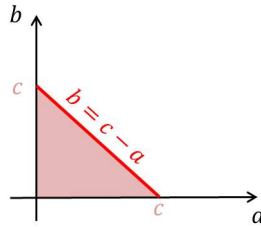


Figura 3

Reemplazando las integrales respecto de  $a$  y de  $b$  por el área de este triángulo, que vale  $c^2/2$  obtenemos

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\infty dc \frac{c^2}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega c} - 1} \quad (36)$$

Y a partir de acá vemos que obtuvimos la misma integral que la del primer término en la expresión (17). Dado que las otras dos integrales las terminamos despreciando, nuestro resultado será igual al del inciso (c).

El cambio de variables que realizamos no es exactamente el que propone el enunciado. Para el cambio de variables que elegimos, los versores  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  y  $\hat{c}$  no son ortonormales.

Si en cambio hubiésemos hecho otro cambio de variables tal que el set  $\hat{a}'$ ,  $\hat{b}'$  y  $\hat{c}'$  sí fuera ortonormal, entonces la integral

$$S = \int da' \int db' \quad (37)$$

correspondería al área del triángulo rosa en la figura 4 que es normal al vector  $\hat{c}$ . Como dice el inciso, esa superficie está definida por el plano con ecuación  $n_x + n_y + n_z = c$ , que acotado en el octante en que  $n_x, n_y, n_z > 0$  corresponde a un triángulo equilátero. Ojo, este triángulo equilátero corta a los ejes en  $n_i = c$ , pero sus lados valen  $\sqrt{2}c$  y no  $c$  como dice el inciso. El área de dicho triángulo es de  $\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$

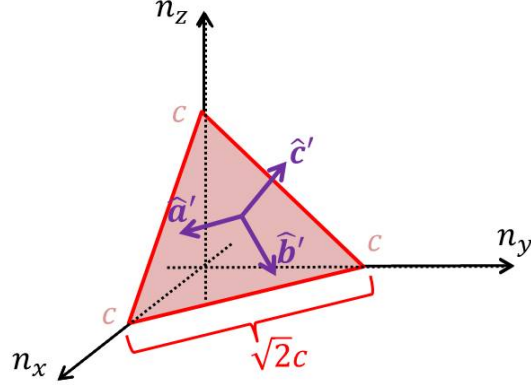


Figura 4

Un posible cambio de variables que cumple con esto consistiría en simplemente rotar la terna  $(n_x, n_y, n_z)$  para que una de las direcciones coincida con la normal al triángulo. Al ser una rotación, los nuevos ejes conservarían su ortonormalidad. Además, este cambio de variables sería una transformación lineal dada por

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (38)$$

donde la matriz  $R_{ij}$  es la matriz de rotación. Al ser una transformación lineal, la matriz diferencial será nada más ni nada menos que esa misma matriz. Como cualquier otra matriz de rotación, su determinante es 1, y por lo tanto, también lo es el Jacobiano.

Cuidado que para que el cambio de variables sea verdaderamente una rotación, la nueva variable  $c'$  tiene que tener el mismo módulo que las  $n_i$ . Con lo cual habría que normalizar el valor de  $c$  a

$$c' = \frac{1}{\sqrt{3}}c = \frac{1}{\sqrt{3}}(n_x + n_y + n_z) \quad (39)$$

Teniendo en cuenta nuestras nuevas variables de integración, y el hecho de que el Jacobiano es 1, podemos reescribir la triple integral como

$$\langle N \rangle = \int_0^\infty dc' \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega\sqrt{3}c'} - 1} \int da' \int db' \quad (40)$$

Reemplazando el valor de la superficie del triángulo, y realizando el cambio de variables  $c = \sqrt{3}c'$ , obtenemos

$$\langle N \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\infty dc \frac{c^2}{z^{-1}e^{\beta\hbar\omega c} - 1} \quad (41)$$

que coincide con lo que veníamos obteniendo con los otros métodos.

### Extra (bis)

Por último, les propongo obtener el mismo resultado, esta vez a partir del Hamiltoniano clásico, pero la estadística de Bose-Einstein. Es decir integrando

$$\langle N \rangle = \frac{1}{h^3} \int d^3r \int d^3p \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}|\mathbf{r}|^2\right)} - 1} \quad (42)$$

Para esto, primero realicen el cambio de variables  $\tilde{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{\beta}{2m}}\mathbf{p}$  y  $\tilde{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\beta m}{2}}\omega\mathbf{r}$ , obteniendo



$$\langle N \rangle = \left( \frac{2}{\beta \hbar \omega} \right)^3 \int d^3 r \int d^3 p \frac{1}{z^{-1} e^{|\tilde{\mathbf{p}}|^2 + |\tilde{\mathbf{r}}|^2} - 1} \quad (43)$$

y luego un cambio de variables a esféricas, pero en 6 dimensiones, donde  $t^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 + \tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_z^2$

$$\langle N \rangle = \left( \frac{2}{\beta \hbar \omega} \right)^3 \Omega_{d=6} \int dt \frac{t^5}{z^{-1} e^{t^2} - 1} \quad (44)$$

Donde  $\Omega_{d=6}$  es la integral de ángulo sólido para esfera de 6 dimensiones. Para esto evaluamos la fórmula  $\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$  con  $d = 6$  obteniendo  $\pi^3$ . Para resolver la integral, podemos hacer un último cambio de variables  $b = t^2$  obteniendo

$$\langle N \rangle = \left( \frac{2}{\beta \hbar \omega} \right)^3 \pi^3 \frac{1}{2} \int db \frac{b^2}{z^{-1} e^b - 1} = \left( \frac{2\pi}{\beta \hbar \omega} \right)^3 \frac{1}{2} \Gamma(3) g_3(z) = \left( \frac{1}{\beta \hbar \omega} \right)^3 g_3(z) \quad (45)$$