Consultas guía 6

Facundo Rost

Física Teórica 3 - 1er cuatrimestre 2020

1. Consultas guía 6

$$Z = \lambda_+^N + \lambda_-^N = \lambda_+^N \left(1 + \left(\overbrace{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}^{<1} \right)^N \right) \simeq \lambda_+^N \tag{1}$$

Ejer 5:

$$Z = Z(K_1, (\cdots), K_{N-1}) = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} e^{-\beta H} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} e^{\sum_{i=1}^{N-1} K_i s_i s_{i+1}} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} e^{K_1 s_1 s_2 + K_2 s_2 s_3 + (\cdots) + K_{N-1} s_{N-2} s_{N-1}} \tag{2}$$

Quiero $C(r) = \langle s_1 s_{r+1} \rangle$. Considero el caso $r = 1$ primero: $C(1) = \langle s_1 s_2 \rangle$.

Veamos que pasa si calculo:

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial K_1}\right|_{K_2,\cdots,K_{N-1}} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} e^{\sum_{i=1}^{N-1} K_i s_i s_{i+1}} \; s_1 s_2 = \tag{3}$$

Multiplico a ambos lados por $1/Z$:

$$\frac{1}{Z} \left.\frac{\partial Z}{\partial K_1}\right|_{K_2,\cdots,K_{N-1}} = \left.\frac{\partial (\ln Z)}{\partial K_1}\right|_{K_2,\cdots,K_{N-1}} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} \overbrace{\frac{e^{\sum_{i=1}^{N-1} K_i s_i s_{i+1}}}{Z}}^{=prob(s_1,(\cdots),s_N)} \; s_1 s_2 = \langle s_1 s_2 \rangle \tag{4}$$

Análogamente:

$$\frac{1}{Z} \left.\frac{\partial Z}{\partial K_i}\right|_{K_j,\ j \neq i} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} \overbrace{\frac{e^{\sum_{i=1}^{N-1} K_i s_i s_{i+1}}}{Z}}^{=prob(s_1,(\cdots),s_N)} \; s_i s_{i+1} = \langle s_i s_{i+1} \rangle \tag{5}$$

OJO!

Si derivo una vez:

$$\frac{1}{Z} \left.\frac{\partial Z}{\partial K_i}\right|_{K_j} = \left.\frac{\partial (\ln Z)}{\partial K_i}\right|_{K_j} \tag{6}$$

Pero si derivo dos veces:

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial K_j \partial K_i} \neq \frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial K_j \partial K_i} = \frac{\partial}{\partial K_j}\overbrace{\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial K_i}\right)}^{=\frac{\partial \ln Z}{\partial K_i}} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial K_j \partial K_i} - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial K_j}\right)\left(\frac{\partial Z}{\partial K_i}\right) \tag{7}$$

Esa diferencia tiene que ver con la diferencia entre $\langle E^2 \rangle$ y $\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \sigma_E^2$ (con E una cierta cantidad).

Si derivo dos o más veces, no es lo mismo derivar a $\ln Z$, que derivar a Z y multiplicar al final por $1/Z$. Acá nos va a convenir la última opción porque va a ser mucho más simple derivar a Z y derivar la exponencial dentro de la sumatoria (que me baja factores), que derivar con sucesivas regla de la cadena a $\ln Z$ (que es bastante más difícil).

Pero, si derivo respecto de K_1 y K_2, voy a tener:

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial K_2 \partial K_1} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} \frac{\overbrace{e^{\sum_{i=1}^{N-1} K_i s_i s_{i+1}}}^{=prob(s_1,(\cdots),s_N)}}{Z} \overbrace{(s_1 s_2)(s_2 s_3)}^{=s_1 s_2^2 s_3 = s_1 s_3} = \langle s_1 s_3 \rangle \tag{8}$$

el $\langle s_1 s_2 s_2 s_3 \rangle = \langle s_1 s_2^2 s_3 \rangle = \langle s_1 s_3 \rangle$.

Análogamente: Si derivo respecto de $K_1, K_2, (\cdots), K_r$ me bajan r factores de la forma $(s_1 s_2)(s_2 s_3)(\cdots)(s_r s_{r+1})$:

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^r\ Z}{\partial K_r \partial K_{r-1}(\cdots)\partial K_2 \partial K_1} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} \frac{\overbrace{e^{\sum_{i=1}^{N-1} K_i s_i s_{i+1}}}^{=prob(s_1,(\cdots),s_N)}}{Z} (s_1 s_2)(s_2 s_3)(s_3 s_4)(\cdots)(s_r s_{r+1}) \tag{9}$$

Usando lo que dice la ayuda: $(s_1 s_2)(s_2 s_3)(s_3 s_4)(\cdots)(s_r s_{r+1}) = s_1 s_{r+1}$ pues $s_i^2 = 1$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^r\ Z}{\partial K_r \partial K_{r-1}(\cdots)\partial K_2 \partial K_1} = \sum_{s_1,(\cdots),s_N} \frac{\overbrace{e^{\sum_{i=1}^{N-1} K_i s_i s_{i+1}}}^{=prob(s_1,(\cdots),s_N)}}{Z} s_1 s_{r+1} = \langle s_1 s_{r+1} \rangle = C(r) \tag{10}$$

Campo medio

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\sigma_1,(\cdots),\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta\left(-J\sum_{(i,j)\ \text{Pr.Vec.}} \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i\right)} \\ &= \sum_{\sigma_1,(\cdots),\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta\left(-J\sum_i \sigma_i \sum_{j\ \in V_i} \sigma_j - \mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i\right)} \end{aligned} \tag{11}$$

Si aproximo $\sigma_j \simeq m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle s_i\rangle$ adentro del término de interacción, tengo $\sigma_i \sum_{j\ \in V_i}\sigma_j \simeq \sigma_i m \sum_{j\ \in V_i} \simeq \sigma_i m\gamma$, con $\gamma = \gamma(d)$ la cantidad de primeros vecinos (depende de la dim d de la red):

$$
\begin{aligned}
Q &\simeq \sum_{\sigma_1,(\cdots),\sigma_N=\pm 1} e^{-\beta\left(-J\sum_i \sigma_i\gamma m - \mu B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)} = \sum_{\sigma_1,(\cdots),\sigma_N=\pm 1} e^{K\sum_i \sigma_i\gamma m + b\sum_{i=1}^{N}\sigma_i} \\
&= \sum_{\sigma_1,(\cdots),\sigma_N=\pm 1} e^{(K\gamma m+b)\sum_{i=1}^{N}\sigma_i} = \sum_{\sigma_1,(\cdots),\sigma_N=\pm 1}\prod_{i=1}^{N} e^{(K\gamma m+b)\sigma_i} \\
&= \prod_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\sum_{\sigma_i=\pm 1} e^{(K\gamma m+b)\sigma_i}\right)}_{\equiv Z_i} = \prod_{i=1}^{N}\left(e^{(K\gamma m+b)} + e^{-(K\gamma m+b)}\right) = \prod_{i=1}^{N}(2\cosh(K\gamma m+b)) \\
&= (2\cosh(K\gamma m+b))^N
\end{aligned}
\tag{12}
$$

La magia de haber aproximado a $\sigma_j \simeq m$ que está fijo pues no varía con la sumatoria, entonces me permite aproximar a mi red de ising interactuante por un sistema no interactuante sometido a un campo medio $B + J\gamma m$ que aproximaba la interacción. Y al no tener interacción puedo factorizar la función de partición y hacer cuentas.

Si queremos calcular m, derivamos respecto de b, pues al haber podido factorizar Q gracias a la aprox de campo medio, tengo una expresión para Q, la pude calcular.