Consultas guía 4 y 5

Facundo Rost

Física Teórica 3 - 1er cuatrimestre 2020

1. Ejer 2 - 2do parcial - 1er cuatri 2018

Ver http://materias.df.uba.ar/t3a2018c1/el-segundo-parcial-y-su-resolucion/

1.1. Inciso a

$$\ln Z_{GC} = \sum_{i\ \in \text{ estados}} - \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon(\vec{p},\vec{q})}) \tag{1}$$

Tenemos que traducir $\displaystyle\sum_{i\ \in \text{ estados}} \to \int d\epsilon\ g(\epsilon)$, o sea: $\displaystyle\sum_{i\ \in \text{ estados}} f(\epsilon_i) = \int d\epsilon\ g(\epsilon) f(\epsilon)$ para cualquier función f. En nuestro caso: $f(\epsilon) = -\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon})$.

Entonces, considerando que describo a mi estado monoparticular especificando un punto $(\vec{p},\vec{q})$ del espacio de fases y una proyección s_z de spin en z (que puede tomar $g_s = 2s+1$ valores posibles):

$$\begin{aligned}\ln Z_{GC} &= \sum_{i\ \in \text{ estados}} - \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon(\vec{p},\vec{q})}) = \sum_{s_z} \int \frac{d^3pd^3q}{h^3}(-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon(\vec{p},\vec{q})})) \overbrace{-g_s \ln(1 - ze^{-\beta 0})}^{\text{contrib. del fundamental}} \\ &= -g_s \ln(1 - z) + g_s \int \frac{d^3pd^3q}{h^3}(-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon(\vec{p},\vec{q})}))\end{aligned} \tag{2}$$

Añadí la contribución del fundamental aparte.

Considerando que $\epsilon(\vec{p},\vec{q}) = \frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m} + \frac{m}{2}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2)$. Voy a definir nuevas variables $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ de forma que la energía tenga la forma: $\epsilon(\vec{p},\vec{q}) = \frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m} + \frac{m}{2}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + \omega_3^2 q_3^2) = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \epsilon(\vec{P},\vec{Q})$. Hago entonces el cambio de variable $p_i \to P_i$ tal que $p_i^2/(2m) = P_i^2 \iff P_i = p_i/\sqrt{2m} \implies dp_i = \sqrt{2m}\ dP_i$; y el cambio de variable $q_i \to Q_i$ tal que $\frac{m}{2}\omega_i^2 q_i^2 = Q_i^2 \iff Q_i = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega_i q_i \implies dq_i = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{1}{\omega_i} dQ_i$ (todo para $i = 1, 2, 3$). Entonces: $d^3pd^3q = (\sqrt{2m})^3(\sqrt{2/m})^3 \frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ d^3Pd^3Q = \frac{2^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ d^3Pd^3Q = \frac{8}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ d^3Pd^3Q$:

$$\ln Z_{GC} = -g_s \ln(1 - z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{8}{\omega_1\omega_2\omega_3}\int d^3Pd^3Q(-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon(\vec{P},\vec{Q})})) \tag{3}$$

Notamos que estamos integrando en el espacio (renormalizado) de fases $(\vec{P},\vec{Q})$, a una función que sólo depende de $\epsilon(\vec{P},\vec{Q}) = P_1^2+P_2^2+P_3^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2$ que es el radio al cuadrado en coordenadas esféricas del espacio de fases (de dimensión 6).

Entonces, en vez de integrar en las coordenadas cartesianas $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 = P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ puedo hacer un cambio de variable a las coordenadas esféricas R, θ_i. Y ese cambio de variable es de la forma $d^3P d^3Q = d^6X = d^{6-1}\Omega\, dR\, R^{6-1} = d^5\Omega\, dR\, R^5$, donde $\int d^5\Omega$ es el área de una esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^6$, que es igual a π^3 (ver enunciado). Notar: $\epsilon = R^2$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{GC} &= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{8}{\omega_1\omega_2\omega_3}\int d^5\Omega\ dR\ R^5(-\ln(1-ze^{-\beta R^2})) \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{8}{\omega_1\omega_2\omega_3}\underbrace{\left(\int d^5\Omega\right)}_{=\pi^3}\int_0^\infty dR\ R^5(-\ln(1-ze^{-\beta R^2})) \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{8\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\int_0^\infty dR\ R^5(-\ln(1-ze^{-\beta R^2}))
\end{aligned} \tag{4}$$

Entonces hacemos el cambio de variable $R \to \epsilon = R^2$ (con $d\epsilon = 2R\ dR$). Entonces:

$$\begin{aligned}
\ln Z_{GC} &= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{4\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\int_0^\infty \overbrace{d\epsilon}^{=2RdR}\ \overbrace{\epsilon^2}^{=R^4}(-\ln(1-ze^{-\beta\epsilon})) \\
&= -g_s \ln(1-z) + \int_0^\infty d\epsilon\ \underbrace{\frac{g_s}{h^3}\frac{4\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \epsilon^2}_{=g(\epsilon)}\ (-\ln(1-ze^{-\beta\epsilon}))
\end{aligned} \tag{5}$$

De esa forma identificamos la densidad de estados $g(\epsilon)$. Notar, lo que hicimos hasta ahora lo podríamos haber hecho con cualquier función $f(\epsilon)$. En particular lo hicimos con $f(\epsilon) = (-\ln(1-ze^{-\beta\epsilon}))$ pero es válido para cualquier $f(\epsilon)$.

Ahora hacemos la integral (o sea la identificamos con alguna g):

$$\begin{aligned}
\ln Z_{GC} &= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{4\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\int_0^\infty d\epsilon\ \ \epsilon^2\ (-\ln(1-ze^{-\beta\epsilon})) \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{4\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\int_0^\infty dx\ \ x^2\ (-\ln(1-ze^{-x})) \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{4\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\left(0-\int_0^\infty dx\ \frac{x^3}{3}\ \frac{(-1)ze^{-x}}{1-ze^{-x}}\right) \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{3h^3}\frac{4\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\int_0^\infty dx\ x^3\ \frac{ze^{-x}}{1-ze^{-x}} \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{3h^3}\frac{4\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\underbrace{\int_0^\infty dx\ x^3\ \frac{1}{z^{-1}e^x-1}}_{=\Gamma(4)g_4(z)} \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{h^3}\frac{8\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ g_4(z) = -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{8\pi^3\ \hbar^3}\frac{8\pi^3}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ g_4(z) \\
&= -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ g_4(z) = -g_s \ln(1-z) + \frac{g_s}{(\beta\hbar\omega_1)(\beta\hbar\omega_2)(\beta\hbar\omega_3)}\ g_4(z)
\end{aligned} \tag{6}$$

En el segundo renglón se hizo el cambio de variable $\epsilon \to x \equiv \beta\epsilon$ (con $dx = \beta d\epsilon$). En el tercer renglón se hizo partes. Notar: $\Gamma(4) = (4-1)! = 3! = 3\cdot 2 = 6$. En el último renglón se usó $\hbar \equiv h/(2\pi) \iff h = 2\pi\hbar$. En nuestro caso, $s = 0 \implies g_s = 2s+1 = 1$.

1.2. Inciso b

Derivamos $\ln Z$:

$$
\begin{aligned}
N &= z\, \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z}\bigg|_{\beta} = g_s\, z\, \frac{\partial(-\ln(1-z))}{\partial z}\bigg|_{\beta} + \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ z\ \frac{\partial(g_4(z))}{\partial z}\bigg|_{\beta} \\
&= \underbrace{g_s\ \frac{z}{1-z}}_{=N_0} + \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ g_3(z)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

N_0 es el número de partículas en el fundamental.

Va a haber condensado de Bose-Einstein (va a ser relevante el término N_0 a temperaturas bajas), porque $g_3(z) \le g_3(1) = \zeta(3) < \infty$ no puede tomar valores arbitrariamente grandes.

Como hay un $z_{Max} = 1$ (en límite termodinámico), entonces podemos dividir en dos casos:

- Caso $z < z_{Max} = 1$. En este caso $f_0 = N_0/N \simeq 0$ es despreciable porque $N_0 = g_s z/(1-z)$ no diverge (ya que $z < 1$) como diverge N en el límite termodinámico. Entonces podemos escribir:

$$
N = \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ g_3(z)
\tag{8}
$$

  Y como $z < 1 \iff g_3(z) < g_3(1) = \zeta(3) < \infty$, entonces debe ocurrir que:

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ g_3(z) < \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ \zeta(3) \\
N &< \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ \frac{1}{\beta^3}\ \zeta(3) = \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ k_B^3 T^3\ \zeta(3)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

  Despejo la T de esa desigualdad, y obtengo:

$$
\begin{aligned}
T^3 &> \frac{1}{k_B^3}\left(N\ \hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3\ \frac{1}{g_s\zeta(3)}\right) \equiv T_C^3 \\
T &> \frac{1}{k_B}\left(N\ \hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3\ \frac{1}{g_s\zeta(3)}\right)^{1/3} \equiv T_C
\end{aligned}
\tag{10}
$$

  Esa es la temperatura crítica del sistema.

- Caso $z = z_{Max} = 1$. Como vimos que $z < 1 \iff T > T_C$, entonces sí o sí debe ocurrir que $z = 1 \iff T < T_C$. Ésto es la fase del condensado de Bose-Einstein. Luego, podemos evaluar la ecuación 7 en $z = 1$:

$$
N = N_0 + \frac{g_s}{\hbar^3}\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3}\ k_B^3 T^3\ \zeta(3)
\tag{11}
$$

Observación, en éste caso como $N_0 > 0 \implies N > \frac{g_s}{\hbar^3} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \; k_B^3 T^3 \; \zeta(3) \iff T < T_C$ Para la fracción de partículas en el fundamental, divido lo anterior por N y despejo $f_0 = N_0/N$:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 1 - \frac{1}{N} \frac{g_s}{\hbar^3} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \; k_B^3 T^3 \; \zeta(3) \\
&= 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3
\end{aligned} \tag{12}
$$