

Problema de Estadística Cuántica

Consideremos un gas de partículas de spin s y masa m sometidos a una trampa armónica tridimensional de frecuencia ω y a un campo gravitatorio g constante en el eje z , de manera que las energías monoparticulares son:

$$\epsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) + mgz + \frac{1}{2}m\frac{g^2}{\omega^2}$$

donde se eligió el cero de energía de forma conveniente.

a) Calcule la densidad de estados del sistema. Luego calcule el logaritmo de la función de partición, tanto para el caso de spin entero (bosones) como semi-impar (fermiones).

b) En caso de que s sea entero, calcule el número de partículas N , y explique qué hay que añadir al logaritmo de la función de partición para que a temperaturas bajas no haya un absurdo. Calcule la temperatura crítica y la fracción de partículas en el estado fundamental en función de T . Discuta en detalle lo que ocurre físicamente en el sistema a temperaturas bajas y altas.

c) En caso de que s sea semi-impar, calcule el número de partículas N . Luego calcule la energía de Fermi del sistema, y el potencial químico a temperaturas bajas (incluyendo la primera corrección no nula). Discuta en detalle lo que ocurre físicamente en el sistema a temperaturas bajas y altas.

Solución

Inciso a

Podemos calcular la densidad de estados del sistema buscando la función $g(\epsilon)$ tal que valga:

$$\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_i) = \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\max}} d\epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) \quad (1)$$

para toda función $f(\epsilon)$ que depende sólo de la energía monoparticular ϵ , donde la sumatoria es sobre los estados monoparticulares del sistema, y la integral sobre energías se hizo en el intervalo $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ de posibles energías monoparticulares.

En nuestro caso en particular, como tenemos un gas de partículas (semi-)clásicas de spin s , describimos a un estado monoparticular del sistema especificando un punto (q, p) del espacio de fases (de dimensión $2d = 6$) y la proyección de spin s_z (que puede tomar $g_s = 2s + 1$ valores entre $-s$ y s). Luego podemos expresar la sumatoria sobre estados monoparticulares como una sumatoria en

proyecciones de spin s_z y una integral en el espacio de fases (adimensionalizada con un factor $1/h^3$):

$$\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_i) = \sum_{s_z=-s}^s \int \frac{d^3q d^3p}{h^3} f(\epsilon) \quad (2)$$

Como la energía no depende de s_z , la sumatoria en spin va a dar simplemente un factor $g_s = 2s + 1$.

Por otro lado, para llegar de la anterior integral en el espacio de fases a una integral en energías como en la ecuación 1, hay que ver con detalle la expresión de la energía monoparticular:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) + mgz + \frac{1}{2}m\frac{g^2}{\omega^2} \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{g}{\omega^2}z + \frac{g^2}{\omega^4} \right) \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x^2 + y^2 + \left(z + \frac{g}{\omega^2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Donde en el segundo renglón se ubicaron los últimos dos términos dentro del paréntesis, y en el tercer renglón se completó cuadrados. Notar que $\epsilon_{\min} = 0$ (de hecho, la elección del cero de energía fue de manera que ocurra esto) y $\epsilon_{\max} = \infty$.

Luego, realizaremos los siguientes cambios de variable en la integral sobre el espacio de fases para simplificar la expresión de la energía monoparticular:

$$\begin{aligned} p_i \rightarrow P_i &= \frac{1}{\sqrt{2m}} p_i \quad , \quad q_j \rightarrow Q_j = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} q_j \quad , \quad z \rightarrow Q_z = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}} \left(z + \frac{g}{\omega^2} \right) \\ \implies dp_i &= \sqrt{2m} dP_i \quad , \quad dq_i = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} dQ_i \end{aligned} \quad (4)$$

donde $i = x, y, z$ y $j = x, y$. Notar que el cambio de variable para z es distinto que para x, y . En el segundo renglón se muestran los jacobianos del cambio de variable, con $i = x, y, z$. También, como todas éstas variables se integran entre $-\infty$ e ∞ , la región de integración no cambia con el cambio de variable.

En términos de éstas variables, la energía queda simplemente como:

$$\epsilon = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2 = R^2 \quad (5)$$

es decir, como el radio R al cuadrado en las coordenadas esféricas del espacio dado por las nuevas coordenadas cartesianas $(P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z)$.

Y con éste cambio de variable, la ecuación 2 queda como:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \text{estados}} f(\epsilon_i) &= \sum_{s_z=-s}^s \int \frac{d^3q d^3p}{h^3} f(\epsilon) = g_s \int \frac{d^3q d^3p}{h^3} f(\epsilon) \\
&= \frac{g_s}{h^3} (2m)^{3/2} \left(\frac{2}{m\omega^2} \right)^{3/2} \int d^3Q d^3P f(\epsilon) \\
&= \frac{g_s}{h^3} \left(\frac{4}{\omega^2} \right)^{3/2} \left(\int d^5\Omega \right) \int_0^\infty dR R^5 f(R^2) \\
&= \frac{g_s}{h^3} \frac{8}{\omega^3} (\pi^3) \int \frac{d\epsilon}{2} \epsilon^2 f(\epsilon) \\
&= \int_0^\infty d\epsilon \underbrace{\left(\frac{g_s}{2} \frac{8\pi^3}{h^3\omega^3} \epsilon^2 \right)}_{= g(\epsilon)} f(\epsilon)
\end{aligned} \tag{6}$$

Donde se aplicó el cambio de variable en el segundo renglón; se pasó a coordenadas esféricas en el tercer renglón; también se separó la integral en $d^5\Omega$ y se calculó dicha integral usando que la superficie de una $(n-1)$ -esfera S^{n-1} de radio 1 (embebida en \mathbb{R}^n) es igual a $\int_{S^{n-1}} d^{n-1}\Omega = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ ¹, y evaluando dicha expresión en $n = 6$ obtenemos $\int_{S^5} d^5\Omega = \frac{2\pi^3}{\Gamma(3)} = \pi^3$; en el cuarto renglón se realizó el cambio de variable $R \rightarrow \epsilon = R^2$ (con $\frac{d\epsilon}{2} = R dR$).

De ésta ecuación identificamos la densidad de estados, de acuerdo a la ecuación 1:

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{2} \frac{8\pi^3}{h^3\omega^3} \epsilon^2 = \frac{g_s}{2} \frac{1}{h^3\omega^3} \epsilon^2 \tag{7}$$

Luego, a partir de la densidad de estados, podemos calcular el logaritmo de la función de partición como (considerando que el signo \pm es un signo $-$ si las partículas son bosones (spin entero) y es un signo $+$ si las partículas son fermiones (spin semi-impar)):

$$\begin{aligned}
\ln(Z_{GC}) &= \sum_{i \in \text{estados}} (\pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon_i})) = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) (\pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon})) \\
&= \frac{g_s/2}{h^3\omega^3} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^2 (\pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon})) \\
&= \frac{g_s/2}{h^3\omega^3} \left(\frac{\epsilon^3}{3} (\pm \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon})) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^3}{3} \left(\frac{-\beta ze^{-\beta\epsilon}}{1 \pm ze^{-\beta\epsilon}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{g_s}{h^3\omega^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^3}{3} \left(\frac{\beta}{z^{-1}e^{+\beta\epsilon} \pm 1} \right) = \frac{g_s}{h^3\omega^3} \frac{1}{\beta^3} \frac{1}{6} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{z^{-1}e^{+\beta\epsilon} \pm 1} \\
&= \frac{g_s}{h^3\omega^3} \frac{1}{\beta^3} I_4^\pm(z)
\end{aligned} \tag{8}$$

donde se usó la expresión obtenida de la densidad de estados en el segundo renglón, se integró por partes en el tercer renglón (observando que se anulan los términos de contorno pues $\epsilon^3|_0 = 0$ y

¹Ver https://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere#Volume_and_surface_area

porque $\epsilon^3 \ln(1 \pm ze^{-\beta\epsilon}) \simeq \pm \epsilon^3 ze^{-\beta\epsilon} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow \infty$); en el cuarto renglón se realizó el cambio de variable $\epsilon \rightarrow x \equiv \beta\epsilon$ (con $dx = \beta d\epsilon$); y en el quinto renglón se identificó por definición a $I_\nu^\pm(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty dx \frac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^{+\beta\epsilon} \pm 1}$ para el caso $\nu = 4$, en el cual $\Gamma(4) = 3! = 6$.

En definitiva, obtuvimos:

$$\ln Z_{GC} = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} I_4^\pm(z) \quad (9)$$

Inciso b

Si s es entero las partículas del gas son bosones, entonces el signo \pm es $-$, y la función $I_\nu^-(z) = g_\nu(z)$ es la integral de Bose:

$$\ln Z_{GC} = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} I_4^-(z) = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_4(z) \quad (10)$$

calculamos el número de partículas N derivando lo anterior respecto de z :

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} z \frac{\partial(g_4(z))}{\partial z} = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_3(z) \quad (11)$$

Y en ésta expresión observamos que si tomamos $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$, ocurre que $N \rightarrow 0$ puesto que $g_3(z) \leq g_3(1) = \zeta(3) < \infty$ (es decir, tenemos $1/\beta^3$ que tiende a 0 multiplicado por la función $g_3(z)$ que está acotada). Lo cual es un absurdo, pues el límite de temperaturas bajas se toma manteniendo N constante.

El problema surge porque la aproximación que se realizó al expresar $\ln Z_{GC}$ como una integral en energías (ver primer renglón de la ecuación 8), subestima muchísimo la contribución del estado fundamental (que posee energía $\epsilon_0 = \epsilon_{\min} = 0$), que a temperaturas bajas está muy ocupado para sistemas bosónicos. Es por eso que resulta necesario considerar la contribución del estado fundamental aparte, afuera de la integral en energías, planteando lo siguiente:

$$\begin{aligned} \ln(Z_{GC}) &= \sum_{i \in \text{estados}} \overbrace{\left(-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \right)}^{= \ln Z_i} + \overbrace{\left(-g_s \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_0}) \right)}^{= \ln Z_0} + \sum_{\substack{i \in \text{estados} \\ \text{no fundamentales}}} \left(-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \right) \\ &= (-g_s \ln(1 - z)) + \sum_{\substack{i \in \text{estados} \\ \text{no fundamentales}}} \left(-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i}) \right) \\ &= (-g_s \ln(1 - z)) + \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \left(-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon}) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

donde se expresó la sumatoria sobre estados no fundamentales como una integral en energías, considerando aparte la contribución del estado fundamental (afuera de la integral), que añade un término

$\ln Z_0 = (-g_s \ln(1 - z))$ al logaritmo de la función de partición de la ecuación 8. El factor $g_s = 2s + 1$ surge porque más precisamente hay g_s estados fundamentales con energía $\epsilon_0 = 0$, pero con distinta proyección de spin. Luego, considerando lo realizado en la cuenta 8 para la densidad de estados del sistema, se tiene que:

$$\begin{aligned} \ln(Z_{GC}) &= (-g_s \ln(1 - z)) + \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) (-\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon})) \\ &= (-g_s \ln(1 - z)) + \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_4(z) \end{aligned} \quad (13)$$

Éste nuevo término implica que ahora el número de partículas N es igual a:

$$\begin{aligned} N &= z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta = z \left. \frac{\partial(-g_s \ln(1 - z))}{\partial z} \right|_\beta + \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_3(z) \\ &= \underbrace{g_s \frac{z}{1 - z}}_{= N_0} + \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_3(z) \end{aligned} \quad (14)$$

es decir, implica que en la expresión de N aparece un nuevo término $N_0 = z \frac{\partial(\ln Z_0)}{\partial z} = g_s \frac{z}{1 - z}$, que se interpreta como el número de partículas en el estado fundamental (pues surge de la contribución $\ln Z_0$ del fundamental a la expresión de $\ln Z_{GC}$).

Éste nuevo término N_0 es el que logra impedir el absurdo a temperaturas bajas, pues al tomar el límite $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$, ocurre que $N \simeq N_0 + 0 = N_0$, y N_0 puede acercarse a N (que en el límite termodinámico es ∞) si z se acerca a 1. Es decir, al bajar la temperatura el término $\frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_3(z)$ se hace cada vez más chico, y debe ocurrir que N_0 aumente lo necesario para compensar de forma que $N = N_0 + \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_3(z) = \text{cte}$ se mantenga constante; y N_0 aumenta si z se acerca a 1. Ya no ocurre el absurdo de que N tiende a 0 gracias a la presencia del número N_0 de partículas del fundamental, que se hace cada vez más apreciable (respecto de N) al bajar la temperatura.

Para calcular la temperatura crítica, consideramos que $g_3(z) \leq g_3(1) = \zeta(3) < \infty$, por lo tanto hay dos posibilidades:

- Caso 1: La temperatura T es tal que $\frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} \zeta(3) > N$, o equivalentemente (despejando $T = 1/(k_B \beta)$) tal que $T > \frac{1}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3) g_s} \hbar^3 \omega^3 \right)^{1/3} = \frac{\hbar \omega}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3) g_s} \right)^{1/3} \equiv T_C$ (que la definimos como la temperatura crítica):

En éste caso, debe ocurrir que $\frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} \zeta(3) > N = N_0 + \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_3(z) \geq \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} g_3(z) \implies \zeta(3) = g_3(1) > g_3(z) \iff z < 1$ (pues g_3 es una función creciente).

Luego, se tiene que para $T > T_C$ la fracción de partículas del estado fundamental es $f_0 \equiv \frac{N_0}{N} = \frac{g_s z}{N(1-z)} \approx 0$ que se anula en el límite termodinámico $N \rightarrow +\infty$, considerando que $z < 1$ (luego que $1 - z \neq 0$).

- Caso 2: La temperatura T es tal que $N > \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3 \beta^3} \zeta(3)$, o equivalentemente (despejando $T = 1/(k_B \beta)$) tal que $T < \frac{1}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3) g_s} \hbar^3 \omega^3 \right)^{1/3} = \frac{\hbar \omega}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3) g_s} \right)^{1/3} \equiv T_C$ (que la definimos como la temperatura crítica):

En éste caso observamos que si fuera válido que $z < 1$ llegaríamos a un absurdo, pues tendríamos que $f_0 \equiv \frac{N_0}{N} = \frac{g_s z}{N(1-z)} \approx 0$ que se anula en el límite termodinámico $N \rightarrow +\infty$ (gracias a que $1 - z \neq 0$), y en consecuencia podríamos despreciar a N_0 de la expresión de N , obteniendo: $N \approx \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3 \beta^3} g_3(z) < \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3 \beta^3} \zeta(3)$, que se contradice con la suposición inicial del caso 2. Entonces, en el caso $T < T_C$, no puede ocurrir que $z < 1$: Debe ocurrir que $z = 1$ (tampoco puede ocurrir que $z > 1$ porque $g_\nu(z)$ no está definida para $z > 1$).

En consecuencia, tenemos que la fracción de partículas en el estado fundamental es (considerando que $z = 1$ en éste caso):

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{N_0}{N} = \frac{N}{N} - \frac{1}{N} \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3 \beta^3} g_3(z) = 1 - \frac{1}{N} \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3 \beta^3} g_3(1) \\ &= 1 - \frac{\hbar^3 \omega^3}{g_s \zeta(3) k_B^3 T_C^3} \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} k_B^3 T^3 \zeta(3) \\ &= 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3 \end{aligned} \quad (15)$$

donde en el primer renglón se evaluó $z = 1$, en el segundo renglón se expresó $1/N$ en función de $T_C \equiv \frac{\hbar \omega}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3) g_s} \right)^{1/3}$ (a partir de lo cual: $N = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} k_B^3 T_C^3 \zeta(3)$). Éste caso, en el que $f_0 > 0$, es el que se denomina condensado de Bose-Einstein, pues existe una fracción apreciable $f_0 > 0$ de partículas condensadas en el estado fundamental.

De ésta forma, calculamos la temperatura crítica del sistema $T_C \equiv \frac{\hbar \omega}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3) g_s} \right)^{1/3}$ que separa los dos regímenes: Caso 1 (sin condensado) en el que $T > T_C \iff z < 1 \iff f_0 = 0$, y caso 2 (condensado) en el que $T < T_C \iff z = 1 \iff f_0 > 0$. Y calculamos la fracción de partículas en el estado fundamental en ambos regímenes, que en función de la temperatura queda como:

$$f_0 = \frac{N_0}{N} = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_C \\ 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3 & \text{si } T < T_C \end{cases} \quad (16)$$

Discusión: Observamos que a temperaturas $T < T_C$ menores a la crítica, ocurre que hay una fracción apreciable de partículas en el estado fundamental $f_0 = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^3$, que crece al achicar la temperatura hasta llegar a $f_0 = 1$ a $T = 0$, en cuyo caso todas las partículas estarían en el estado fundamental. Éste fenómeno en el que la fracción de partículas condensadas en el estado fundamental es apreciable se denomina condensado de Bose-Einstein, y es lógico por la propia estadística de Bose-Einstein de los bosones que a temperaturas pequeñas quieran minimizar su energía y se puedan juntar todos en el estado fundamental, cosa que por supuesto no va a pasar en un sistema fermiónico pues los fermiones no se pueden juntar en un mismo estado.

También observamos que a $T > T_C$ ocurre que no hay condensado de Bose-Einstein pues $f_0 = 0$. Y además a temperaturas muy altas ocurre que $g_\nu(z) \approx z$ y el sistema posee estadística de Boltzmann, es decir se comporta como un gas ideal de partículas clásicas indistinguibles (donde la indistinguibilidad se aproxima con el conteo correcto de Boltzmann).

Inciso c

Si s es semi-impar las partículas del gas son fermiones, entonces el signo \pm es $+$, y la función $I_\nu^+(z) = f_\nu(z)$ es la integral de Fermi:

$$\ln Z_{GC} = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} I_4^+(z) = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} f_4(z) \quad (17)$$

calculamos el número de partículas N derivando lo anterior respecto de z :

$$N = z \left. \frac{\partial(\ln Z_{GC})}{\partial z} \right|_\beta = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} z \frac{\partial(f_4(z))}{\partial z} = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} f_3(z) \quad (18)$$

Si estudiamos la anterior expresión en el límite de bajas temperaturas $T \rightarrow 0^+ \iff \beta \rightarrow +\infty$ manteniéndolo N constante, vemos que debe ocurrir que $f_3(z) \rightarrow +\infty \iff z \rightarrow +\infty$ para que N se mantenga constante, por lo que en dicho límite es válido aplicar la expansión de Sommerfeld (considerando $\ln z = \beta\mu$):

$$\begin{aligned} N &= \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{1}{\beta^3} \frac{\beta^3 \mu^3}{\Gamma(4)} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{3(3-1)}{\beta^2 \mu^2} + \mathcal{O}(\beta^{-4} \mu^{-4}) \right) \\ &= \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{\mu^3}{6} \left(1 + \frac{\pi^2}{\beta^2 \mu^2} + \mathcal{O}(\beta^{-4} \mu^{-4}) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Y si se quiere calcular la energía de Fermi $\epsilon_F = \mu(T = 0)$ a partir de lo anterior, hay que evaluar dicha expresión en $T = 0 \iff 1/\beta = 0$:

$$N = \frac{g_s}{\hbar^3 \omega^3} \frac{\epsilon_F^3}{6} \implies \epsilon_F = \left(\frac{6}{g_s} \frac{\hbar^3 \omega^3}{N} \right)^{1/3} = \hbar \omega \left(\frac{6}{g_s} \frac{1}{N} \right)^{1/3} \quad (20)$$

Por otro lado, si se quiere calcular el potencial químico a temperaturas bajas (no nulas) incluyendo la primera corrección no nula, expresamos la ecuación 19 considerando $\mu(T) = \epsilon_F(1 + \mathcal{O}(T/T_F))$ con $T_F \equiv \epsilon_F/k_B$ temperatura de Fermi, y luego $(\beta\mu)^{-2} = (\beta\epsilon_F)^{-2}(1 + \mathcal{O}(T/T_F)) = (\beta\epsilon_F)^{-2} + \mathcal{O}(T^3/T_F^3) = \frac{T^2}{T_F^2} + \mathcal{O}(T^3/T_F^3)$:

$$\begin{aligned}
N &= \frac{g_s}{\hbar^3\omega^3} \frac{\mu(T)^3}{6} \left(1 + \frac{\pi^2}{\beta^2\epsilon_F^2} + \mathcal{O}(T^3/T_F^3) \right) \\
\implies \mu(T)^3 &= \hbar^3\omega^3 \frac{6}{g_s} N \left(1 - \frac{\pi^2}{\beta^2\epsilon_F^2} + \mathcal{O}(T^3/T_F^3) \right) \\
\implies \mu(T) &= \hbar\omega \underbrace{\left(\frac{6}{g_s} N \right)^{1/3}}_{= \epsilon_F} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{T^2}{T_F^2} + \mathcal{O}(T^3/T_F^3) \right)
\end{aligned} \tag{21}$$

Discusión: A temperaturas $T \ll T_F$ muy bajas respecto a la temperatura de Fermi, el comportamiento físico del sistema se acerca a lo que ocurre a $T = 0$: Los fermiones buscan minimizar su energía pero no pueden haber dos o más en un mismo estado, por lo que no pueden ir todos al fundamental; deben acomodarse en todos los estados con energía menor a ϵ_F ocupando cada uno de éstos con un sólo fermión (y dejando desocupados los estados con energía mayor a ϵ_F).

Y a temperaturas muy altas (respecto de T_F) ocurre que $f_\nu(z) \approx z$ y el sistema posee estadística de Boltzmann, es decir se comporta como un gas ideal de partículas clásicas indistinguibles (donde la indistinguibilidad se aproxima con el conteo correcto de Boltzmann).