Parcial de Física Teórica 3
3/8/2020

Problema 1

Considere un sistema de N partículas distinguibles no interactuantes. Cada partícula puede tener dos energías, 0 y ϵ, y para cada energía hay infinitos estados posibles, que corresponden a que la partícula tenga volumen nv_0, donde v_0 es una constante positiva y $n = 0, 1, 2, \ldots$ El volumen total del sistema es la suma de los volúmenes de las partículas.

(a) Calcule la entropía del sistema en el ensamble microcanónico. Con ella, calcule la ecuación de estado que vincula la presión p, el volumen V, la temperatura T y el número de partículas N. Obtenga también la energía E en función de T, V, N.

(b) Escoja otro ensamble, y muestre que obtiene los mismos resultados en el límite termodinámico. ¿Cómo es la ecuación de estado en el límite de baja presión $pv_0 \ll kT$?

(c) ¿Cómo se modifica la ecuación de estado si no se permite la posibilidad de que $n = 0$? Explique por qué a bajas presiones la ecuación de estado coincide con la del inciso (b).

Problema 2

Consideremos un gas de partículas de spin s y masa m sometidos a una trampa armónica tridimensional de frecuencia ω y a un campo gravitatorio g constante en el eje z, de manera que las energías monoparticulares son

$$\epsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2) + mgz + \frac{1}{2}m\frac{g^2}{\omega^2},$$

donde se eligió el cero de energía de forma conveniente.

(a) Calcule la densidad de estados del sistema. Luego calcule el logaritmo de la función de partición, tanto para el caso de spin entero (bosones) como semi-impar (fermiones).

(b) En caso de que s sea entero, calcule el número de partículas N, y explique qué hay que añadir al logaritmo de la función de partición para que a temperaturas bajas no haya un absurdo. Calcule la temperatura crítica y la fracción de partículas en el estado fundamental en función de T. Discuta en detalle lo que ocurre físicamente en el sistema a temperaturas bajas y altas.

(c) En el caso de que s sea semi-impar, calcule el número de partículas N. Luego calcule la energía de Fermi del sistema, y el potencial químico a temperaturas bajas (incluyendo la primera corrección no nula). Discuta en detalle lo que ocurre físicamente en el sistema a temperaturas bajas y altas.

Problema 3

Considere una cadena unidimensional abierta de spines con hamiltoniano

$$H(s_1, \ldots, s_N) = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i \delta_{s_i s_{i+1}},$$

donde $s_i = 1, \ldots, q$ (es decir, cada spin puede estar en q estados distintos), J_i son constantes positivas y δ_{ab} es la delta de Kronecker ($\delta_{ab} = 1$ si $a = b$, $\delta_{ab} = 0$ si $a \neq b$).

(a) Calcule la función de partición canónica de la cadena.

(b) Calcule la energía media, y discuta su resultado en el caso $T = 0$.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que $s_1 = s_2$? ¿Y la de que $s_1 = s_2 = \cdots = s_n$ para $n \leq N$? Discuta su resultado en los casos $T = 0$ y $T \to \infty$.
Ayuda: Si una variable X vale 1 cuando ocurre el evento E y 0 cuando no ocurre, entonces $\langle X \rangle = P(E)$.

(d) Calcule la entropía de la cadena a $T = 0$. ¿Cuánto valdría si las constantes J_i fueran negativas? ¿Y si sus signos se alternaran? En el último caso, asuma que $J_1 > 0$ y que N es par. Discuta sus resultados.