Recuperatorio de Física Teórica 3
10/8/2020

Problema 1

Considere un sistema de N partículas distinguibles y no interactuantes. Las energías monoparticulares son $\epsilon_i = \epsilon_0 n_i^2$, donde $\epsilon_0 > 0$ y $n_i = 0, 1, 2, \ldots$, y tienen degeneración g.

(a) Calcule el número de microestados con energía entre $E - \Delta E$ y E, asumiendo $E/\epsilon_0, N \gg 1$, y de ahí obtenga la entropía del sistema en función de E y N. Calcule la temperatura T en función de esas variables.

(b) Muestre que obtiene el mismo resultado para $T(E, N)$ utilizando algún ensamble distinto del microcanónico.

(c) Suponga ahora que las partículas son indistinguibles, pero trate esa indistinguibilidad de forma aproximada aplicando el conteo de Boltzmann. Suponiendo que $g = \alpha V$, donde V es el volumen del sistema, obtenga una expresión que relacione la presión p, el potencial químico μ, T y V.

Problema 2

Una mezcla gaseosa de N fermiones, de masa m_1 y spin $3/2$, y N bosones, de masa m_2 y spin 0, se encuentra contenida en un recipiente con un pistón móvil, en contacto con un reservorio térmico a temperatura T. La temperatura es lo suficientemente baja como para asumir que el gas de fermiones se encuentra completamente degenerado y que en el gas de bosones coexisten la fase normal y la fase condensada. Inicialmente la mezcla de especies ocupa un volumen V_0, pero se le suministra calor de forma cuasiestática hasta que duplica el volumen inicial.

(a) Calcule el trabajo ejercido sobre el sistema en esta expansión reversible (teniendo en cuenta que la presión de una mezcla de gases es la suma de las presiones de cada gas), así como la variación de su energía interna. ¿Cuál es el calor absorbido por el sistema en este proceso? Por el momento puede considerar que la temperatura T es un dato.

(b) Sabiendo que $1/6$ de los bosones se encuentran inicialmente en la fase normal, determine T en función de los demás datos del problema. ¿Cuál es la fracción de bosones en la fase normal al final del proceso?

Problema 3

Considere el modelo de Ising en ausencia de campo magnético,

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j,$$

pero donde cada spin puede estar en tres estados, $s_i = -1, 0, 1$.

(a) Para una red genérica con γ primeros vecinos por sitio, calcule la temperatura crítica en la aproximación de campo medio. Discuta su resultado en comparación con el que se obtiene en el modelo de Ising usual.

(b) En las condiciones del ítem anterior, obtenga una expresión aproximada para la magnetización en función de la temperatura para temperaturas cercanas a la crítica e inferiores a ella.

(c) Considere el caso de una red bidimensional cuadrada. Tratando exactamente la interacción entre un par de primeros vecinos y aproximando por campo medio la interacción del par con su entorno, muestre que la temperatura crítica satisface la ecuación

$$\beta_c J = \frac{1}{3} \frac{\cosh(\beta_c J) + 5/4}{e^{\beta_c J} + 1/2}.$$

Esta ecuación se puede resolver numéricamente y se obtiene $\beta_c J \simeq 0.392$. Discuta este resultado en comparación con el del ítem (a).