# Recuperatorio de Física Teórica 3
# Problema 3

## Enunciado

*Considere el modelo de Ising en ausencia de campo magnético,*

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j,$$

*pero donde cada spin puede estar en tres estados, $s_i = -1, 0, 1$.*

(a) *Para una red genérica con $\gamma$ primeros vecinos por sitio, calcule la temperatura crítica en la aproximación de campo medio. Discuta su resultado en comparación con el que se obtiene en el modelo de Ising usual.*

(b) *En las condiciones del ítem anterior, obtenga una expresión aproximada para la magnetización en función de la temperatura para temperaturas cercanas a la crítica e inferiores a ella.*

(c) *Considere el caso de una red bidimensional cuadrada. Tratando exactamente la interacción entre un par de primeros vecinos y aproximando por campo medio la interacción del par con su entorno, muestre que la temperatura crítica satisface la ecuación*

$$\beta_c J = \frac{1}{3} \frac{\cosh(\beta_c J) + 5/4}{e^{\beta_c J} + 1/2}.$$

*Esta ecuación se puede resolver numéricamente y se obtiene $\beta_c J \simeq 0.392$. Discuta este resultado en comparación con el del ítem (a).*

## Resolución

*(a)* En la aproximación de campo medio, el hamiltoniano de un spin es

$$H = -B_{\text{ef}} s \qquad B_{\text{ef}} = J\gamma m, \tag{1}$$

donde $m$ es la magnetización. Por lo tanto, la función de partición canónica de un spin es

$$Z_1 = \sum_{s=0,\pm 1} e^{\beta B_{\rm ef} s} = 1 + 2\cosh(\beta B_{\rm ef} s). \tag{2}$$

Derivando respecto a $B_{\rm ef}$ obtenemos la ecuación de autoconsistencia,

$$m = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial B_{\rm ef}} \ln Z_1 = \frac{\sinh(\beta B_{\rm ef})}{\cosh(\beta B_{\rm ef}) + 1/2} = \frac{\sinh(\beta J\gamma m)}{\cosh(\beta J\gamma m) + 1/2} \tag{3}$$

La temperatura crítica se obtiene imponiendo que la derivada del lado derecho respecto a $m$ evaluada en $m = 0$ sea 1,

$$1 = \frac{2}{3}\beta_c J\gamma \quad \Rightarrow \quad T_c = \frac{2}{3}\frac{J\gamma}{k}. \tag{4}$$

La temperatura crítica, pues, nos da menor que en el caso usual (dos estados por sitio). Eso se puede entender de la siguiente forma: la probabilidad de que todos los spines apunten para arriba es

$$P(1,\ldots,1) = \frac{e^{-\beta H(1,\ldots,1)}}{Z}. \tag{5}$$

El numerador es el mismo en el caso usual y en el de este problema, pero el denominador es mayor en nuestro caso, porque hay más estados. Así pues, en nuestro caso es más difícil que el sistema se magnetice espontáneamente y por lo tanto hay que bajar más la temperatura para que eso ocurra.

*(b)* De la primera ecuación en (4) vemos que $J\gamma = 3/(2\beta_c)$ y por lo tanto

$$\beta J\gamma = \frac{3}{2}\frac{\beta}{\beta_c} = \frac{3}{2}\frac{T_c}{T}. \tag{6}$$

Reemplazando en la ecuación de autoconsistencia (3) obtenemos

$$m = \frac{\sinh\left(\frac{3}{2}\frac{T_c}{T}m\right)}{\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{T_c}{T}m\right) + 1/2}. \tag{7}$$

Ahora, a temperaturas cercanas a la crítica tenemos $m \ll 1$. Definiendo $x = (3/2)(T_c/T)m$ y usando las expansiones $\sinh x \simeq x + x^3/6$, $\cosh x \simeq 1 + x^2/2$ obtenemos

$$\begin{aligned} m &\simeq \frac{x + x^3/6}{1 + x^2/2 + 1/2} = \frac{2}{3}x\frac{1 + x^2/6}{1 + x^2/3} \simeq \frac{2}{3}x\left(1 + \frac{x^2}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) \\ &\simeq \frac{2}{3}x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = \frac{T_c}{T}m\left[1 - \frac{3}{8}\left(\frac{T_c}{T}m\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

A temperaturas inferiores a la crítica tenemos $m \neq 0$, así que podemos dividir a ambos lados por $m$ y obtenemos

$$m = \pm\frac{T}{T_c}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{T_c - T}{T_c}} \simeq \pm\sqrt{\frac{8}{3}\frac{T_c - T}{T_c}}, \tag{9}$$

lo cual responde a la pregunta de este ítem.

*(c)* El Hamiltoniano de un par de primeros vecinos en la aproximación requerida por el ejercicio es

$$H_2 = -Jss' - B_{\text{ef}}(s + s') \qquad B_{\text{ef}} = 3Jm. \tag{10}$$

La función de partición del par es una suma de 9 términos. Los escribimos en este orden: $++, --, +-, -+, +0, 0+, -0, 0-, 00$. Obtenemos

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sum_{s,s'} e^{\beta Jss' + \beta B_{\text{ef}}(s+s')} \\ &= e^{\beta J + 2\beta B_{\text{ef}}} + e^{\beta J - 2\beta B_{\text{ef}}} + 2e^{-\beta J} + 2e^{\beta B_{\text{ef}}} + 2e^{-\beta B_{\text{ef}}} + 1 \\ &= 2e^{\beta J} \cosh(2\beta B_{\text{ef}}) + 2e^{-\beta J} + 4\cosh(\beta B_{\text{ef}}) + 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Derivando respecto a $B_{\text{ef}}$ obtenemos la ecuación de autoconsistencia,

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2\beta} \frac{\partial}{\partial B_{\text{ef}}} \ln Z_2 = \frac{e^{\beta J} \sinh(2\beta B_{\text{ef}}) + \sinh(\beta B_{\text{ef}})}{e^{\beta J} \cosh(2\beta B_{\text{ef}}) + e^{-\beta J} + 2\cosh(\beta B_{\text{ef}}) + 1/2} \\ &= \frac{e^{\beta J} \sinh(6\beta Jm) + \sinh(3\beta Jm)}{e^{\beta J} \cosh(6\beta Jm) + e^{-\beta J} + 2\cosh(3\beta Jm) + 1/2}. \end{aligned} \tag{12}$$

La temperatura crítica la obtenemos imponiendo que la derivada del lado derecho respecto a $m$ evaluada en $m = 0$ sea 1,

$$1 = 3\beta_c J \frac{2e^{\beta_c J} + 1}{2\cosh(\beta_c J) + 5/2} = 3\beta_c J \frac{e^{\beta_c J} + 1/2}{\cosh(\beta_c J) + 5/4}, \tag{13}$$

y por lo tanto

$$\beta_c J = \frac{1}{3} \frac{\cosh(\beta_c J) + 5/4}{e^{\beta_c J} + 1/2}, \tag{14}$$

como queríamos demostrar. El resultado $\beta_c J \simeq 0.392$ es mayor que el que obtuvimos con campo medio usual, $\beta_c J = 3/(2\gamma) = 3/8 = 0.375$, y por lo tanto la temperatura crítica es menor. Eso está de acuerdo con lo que suele ocurrir: la aproximación de campo medio sobreestima la temperatura crítica, y al mejorarla (como hicimos en este ítem) la bajamos un poquito acercándonos un poco más al valor exacto.