

# Critical\_3b

侍



# Funciones de correlacion

A partir de experimentos de scattering se obtiene que para

$r$  grande comparado con la "distancia intermolecular  $v$

$$T = T_c$$

$$g_c^{(2)}(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r^{(d-2+\eta)}}$$

con  $0 \leq \eta \leq 0.1$

Lejos de  $T_c$  es una funcion complicada

Para  $\epsilon = |T - T_c|/T_c \ll 1$  y  $r$  grande

$$g_c^{(2)}(\mathbf{r}) \sim \exp\left(-\frac{r}{\xi}\right)$$

Donde  $\xi$  es la **distancia de correlacion**

Esto significa que la magnitud relevante fluctua en bloques de todos los tamaños hasta  $\xi$  y fluctuaciones mas grandes son muy raras

Experimentalmente se verifica que

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$$

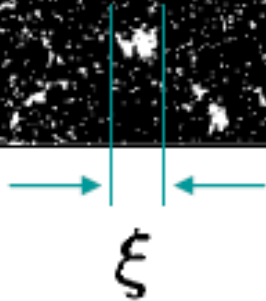
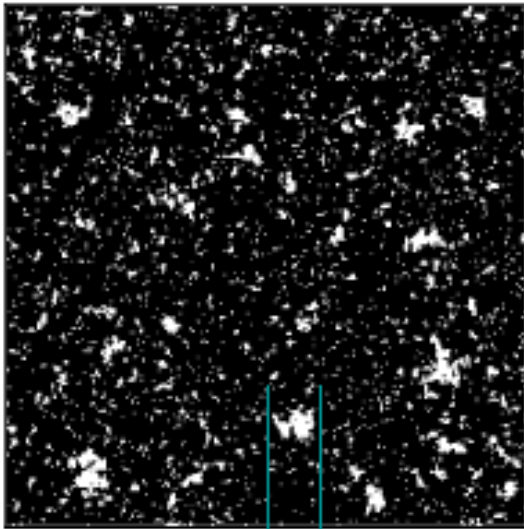
con  $(|T - T_c|/T_c \ll 1)$

En suma:

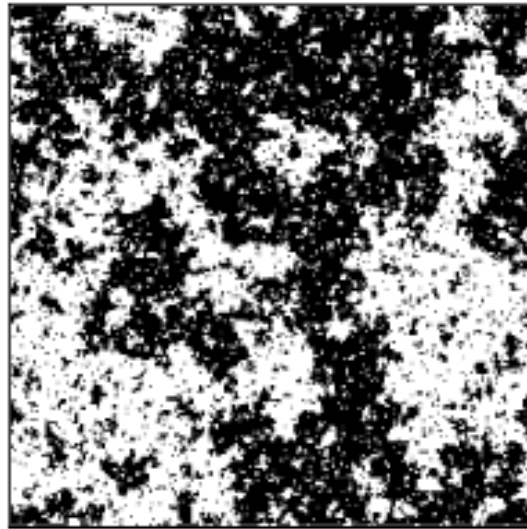
Por encima o debajo de  $T_c$  correlaciones de largo rango son exponencialmente improbables

En  $T_c$ , son potenciales.

$T < T_c$

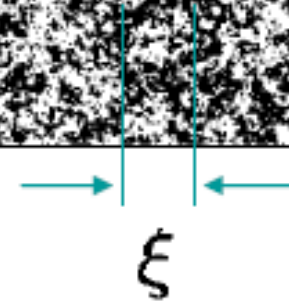
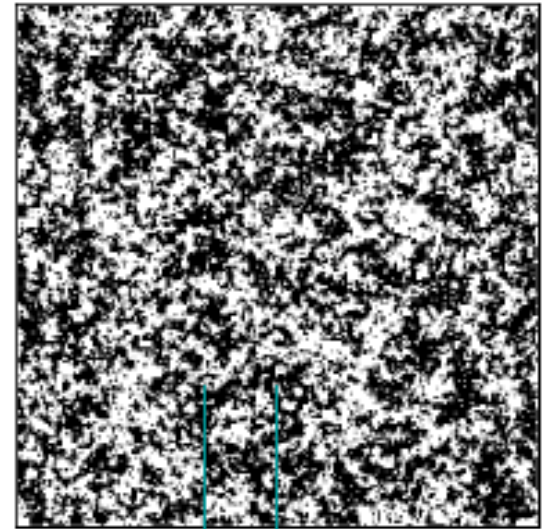


$T \simeq T_c$



$\xi \simeq \infty$

$T > T_c$



Cual es cual?

## Construcción de Kadanoff

Sea un sistema de Ising con una 'energía'  
(en unidades de  $kT$ )

$$\beta H = -J \sum_{\{ij\}} s_i s_j - h \sum_{i=1} s_i$$

Kadanoff considera la siguiente situación:

1) Sea  $a$  la "distancia" entre dos spines vecinos (constante de la red).

Definimos celdas de tamaño  $La$  con  $L \gg 1$ .

2) El número de celdas es  $n=N/L^d$

3) Sea  $|T - T_c|/T_c \ll 1$  y por lo tanto  $\xi \sim |T - T_c|^{-\nu}$  como  $\nu \sim \frac{2}{3} \Rightarrow \xi$  es muy grande  $\gg La$

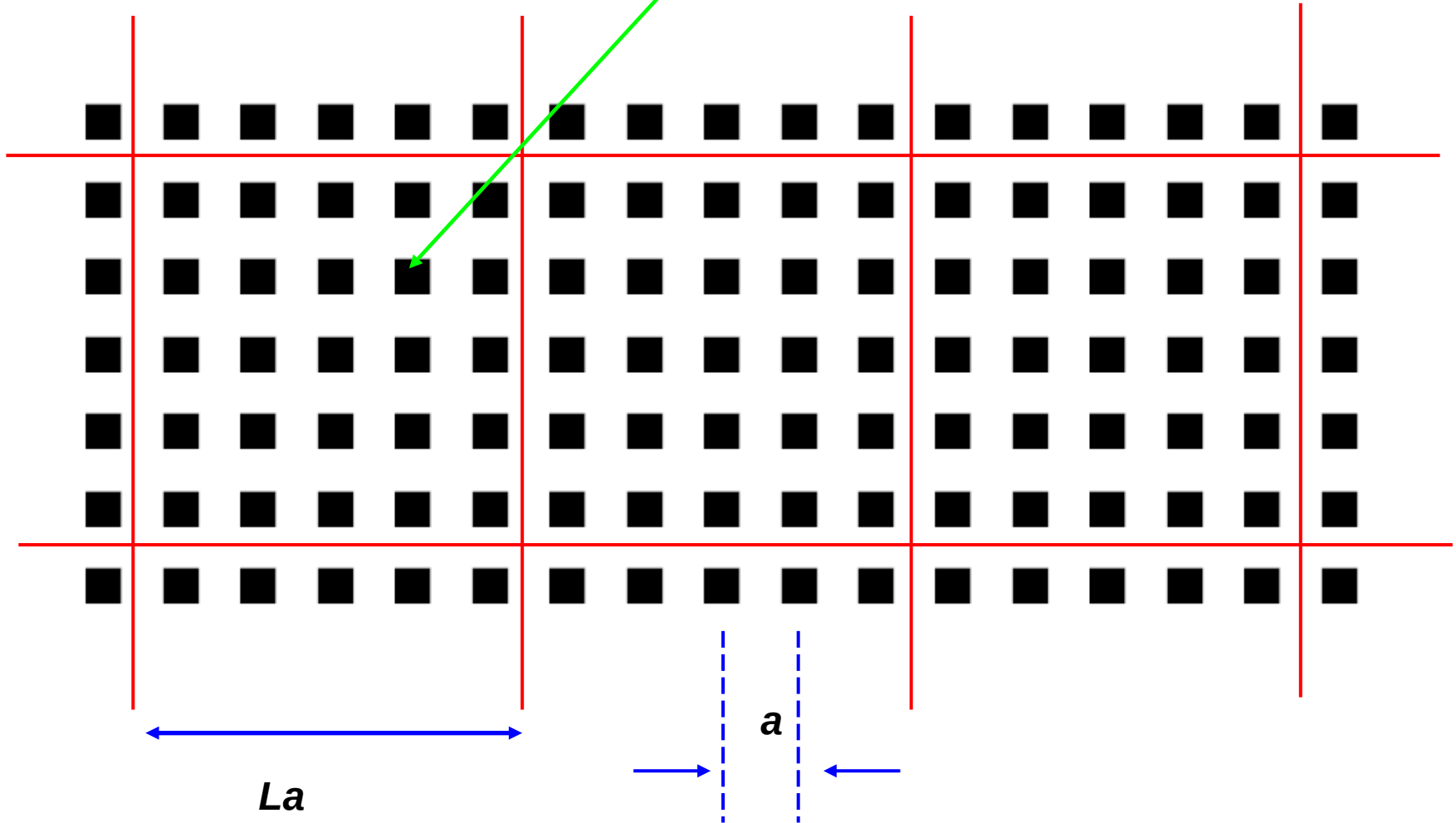
Cada celda contiene  $L^d$  spines ( $d$  es la dimension)

Como  $1 \ll L \ll \xi/a$  en un cluster de spines correlacionadas habrá muchas celdas.

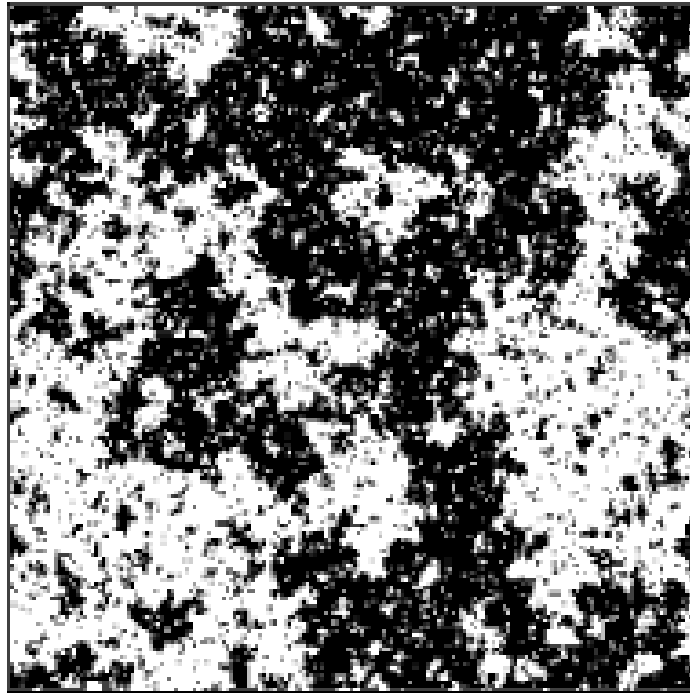
# ESTRUCTURA DE CELDAS

Con  $L=5$

$L^2$  spines = 25



$$T \simeq T_c$$



$$\xi \simeq \infty$$

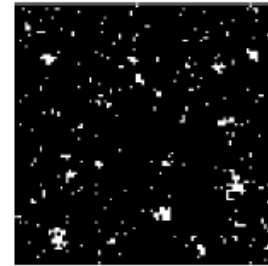
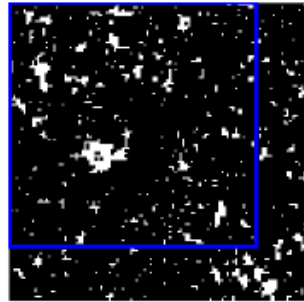


- Rotulamos las celdas con  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$
- A cada celda  $\alpha$  le asociamos un momento magnetico  $\tilde{S}_\alpha$
- Suponemos ahora que  $\tilde{S}_\alpha$  se comporta como un spin  $s_i$  i.e. estara  $\uparrow$  o  $\downarrow$ . Como las celdas estarán muy correlacionadas los spines individuales estaran "apuntando basicamente en la misma dirección"

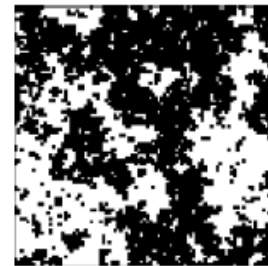
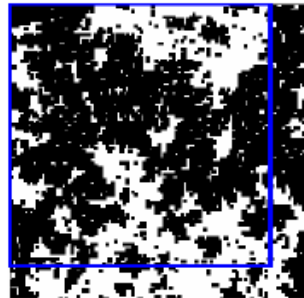
De esta forma podemos pensar en reformular nuestro problema en termino de las celdas (y sus spines efectivos).

Al ser "equivalentes" es de esperar que el hamiltoniano del sistema resultante sea de la misma forma (pero con coeficientes diferentes)

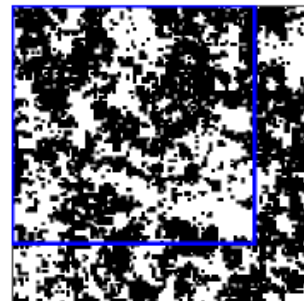
- In the ordered phase ( $T < T_c$ )



- Near the critical point ( $T \simeq T_c$ )



- In the disordered phase ( $T > T_c$ )



Entonces, si tenemos dos sistemas con hamiltonianos de la misma forma, esperamos que las funciones termodinamicas de ambos sistemas sean similares (a menos de diferencias en parametros).

Proponemos entonces para la energia libre de Gibbs

$$\bar{G}(\tilde{\epsilon}, \tilde{h}) = L^d \bar{G}(\epsilon, h)$$

donde  $\bar{G}(\tilde{\epsilon}, \tilde{h}) \rightarrow$  es el Gibbs **por celda**

donde  $\bar{G}(\epsilon, h) \rightarrow$  es el Gibbs **por spin**

Relacionamos ahora  $(\tilde{\epsilon}, \tilde{h})$  con  $(\epsilon, h)$

Es de esperar que

$$\tilde{h} = H(L)h$$

donde  $H(L)$  es una constante de proporcionalidad dependiente de  $L$

Cambia la  
Distancia  
Al punto  
Critico!

Del mismo modo

$$\tilde{\epsilon} = T(L)\epsilon$$

Que es esto?

Kadanoff propone

$$H(L) = L^x \quad T(L) = L^y$$

con  $x, y$  numeros arbitrarios.

(con esto tomamos en cuenta que no todos esten alineados, etc.)

De esta forma

$$\bar{G}(L^y \epsilon, L^x h) = L^d \bar{G}(\epsilon, h)$$

Por spin

y esto es una función homogenea generalizada!!!!!!

De donde

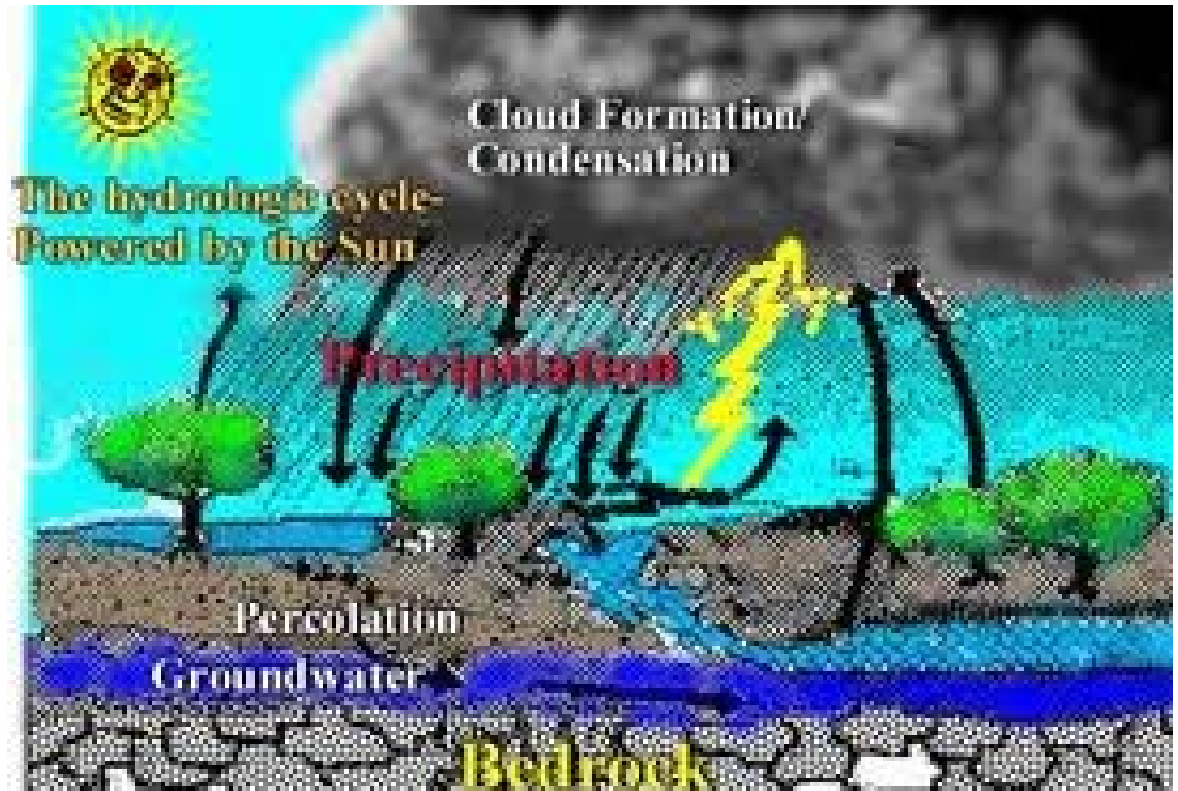
$$\bar{G}(L^{y/d} \epsilon, L^{x/d} h) = L \bar{G}(\epsilon, h)$$

Pero esta es la hipotesis de escaleo estatica con

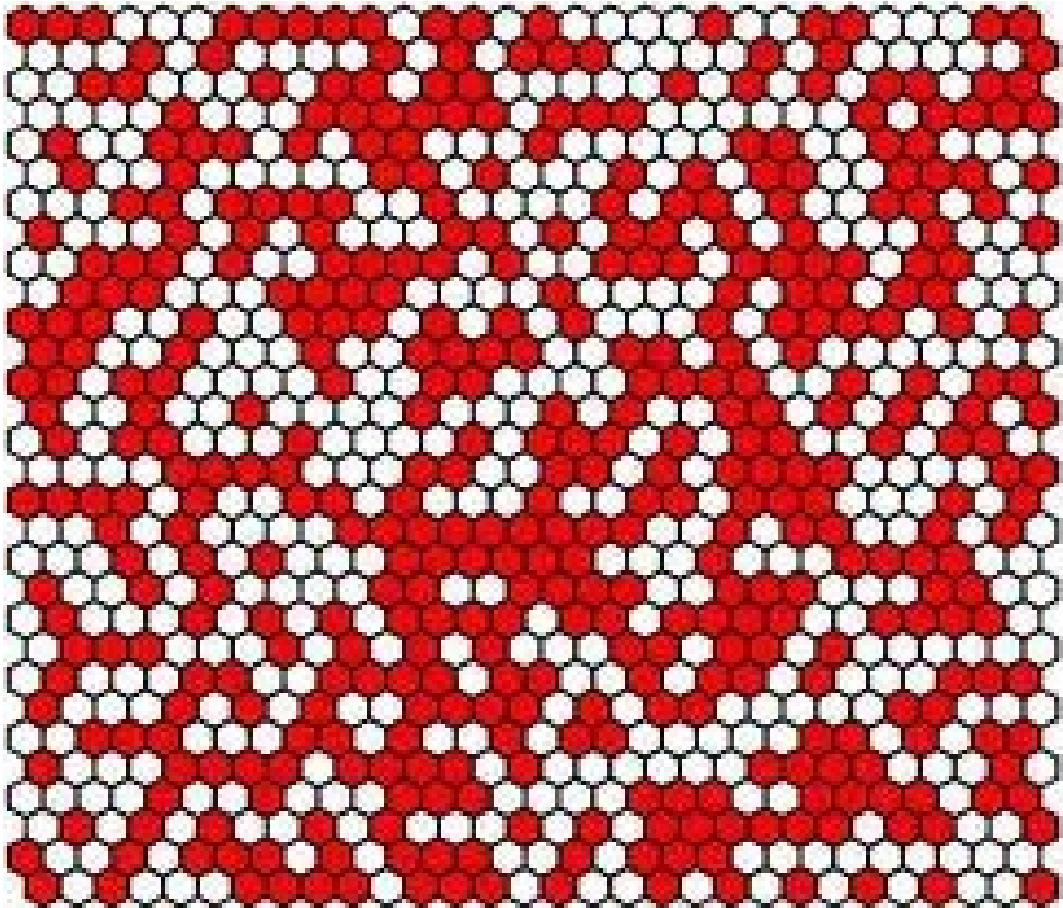
$$p = \frac{y}{d} \quad q = \frac{x}{d}$$

Primero veamos algo simple

## Percolacion

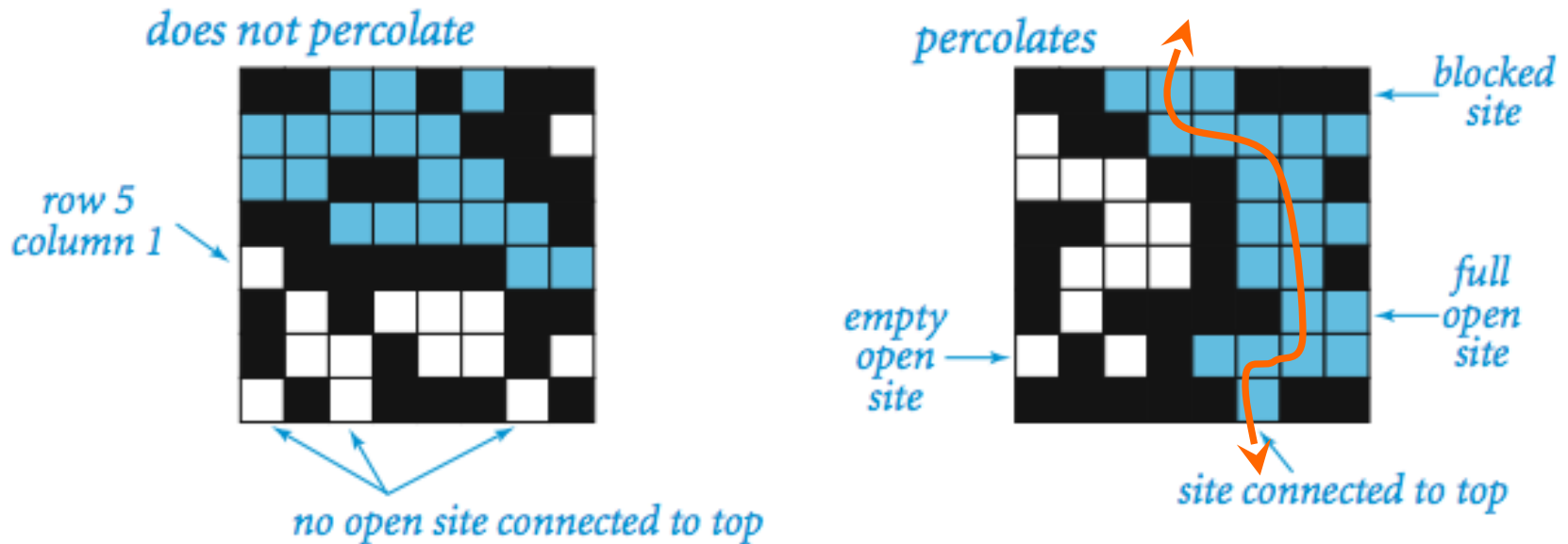


red triangular  
un punto es rojo con probabilidad  $p$



# Que es percolar?

Para una red cuadrada :

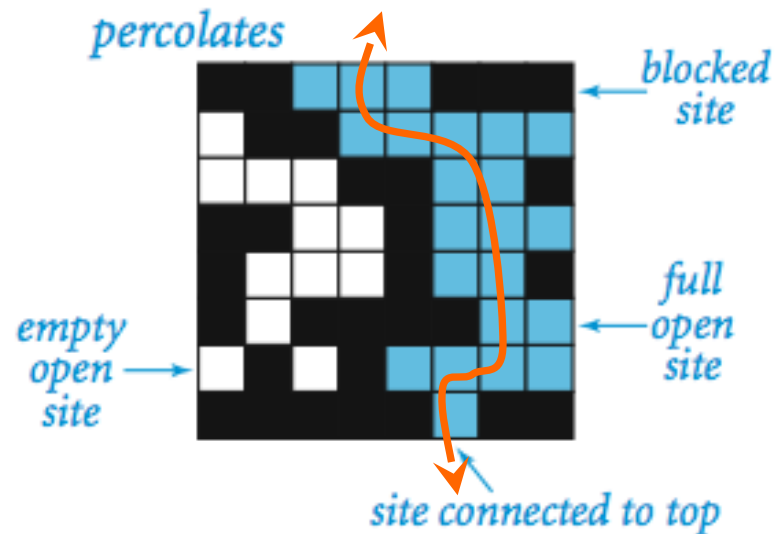
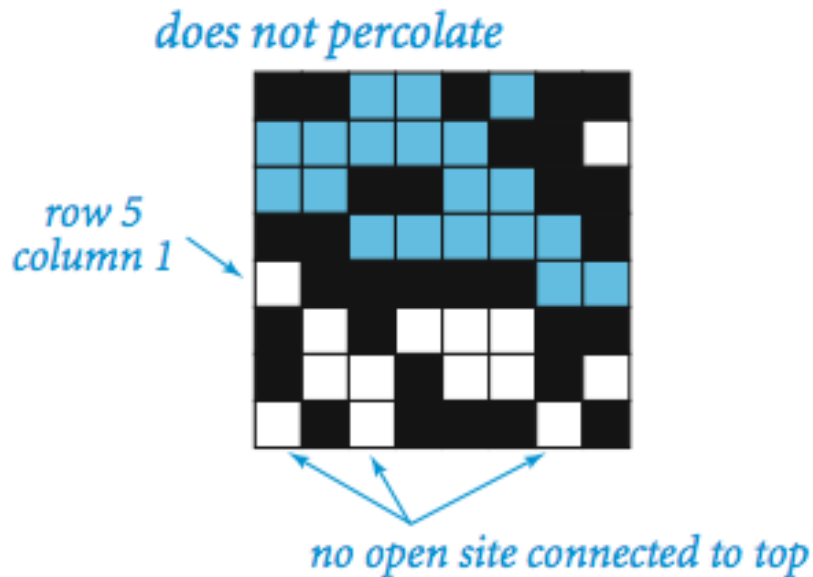


$P$  = probabilidad que un nodo pertenezca al cluster percolante



# Que es percolar?

Para una red cuadrada :



$P$  = probabilidad que un nodo pertenezca al cluster percolante

$\rho$  = probabilidad que un nodo este ocupado

$$P = \frac{M_c}{N}, \quad \rho = \frac{M}{N}; \quad M_c \text{ masa del Cluster percolante, } N \text{ numero de nodos}$$

En un problema de percolacion se pueblan o activan nodos/links con Una cierta probabilidad  $p$

Algunas propiedades :

a) La fuerza del cluster percolante (parametro de orden)

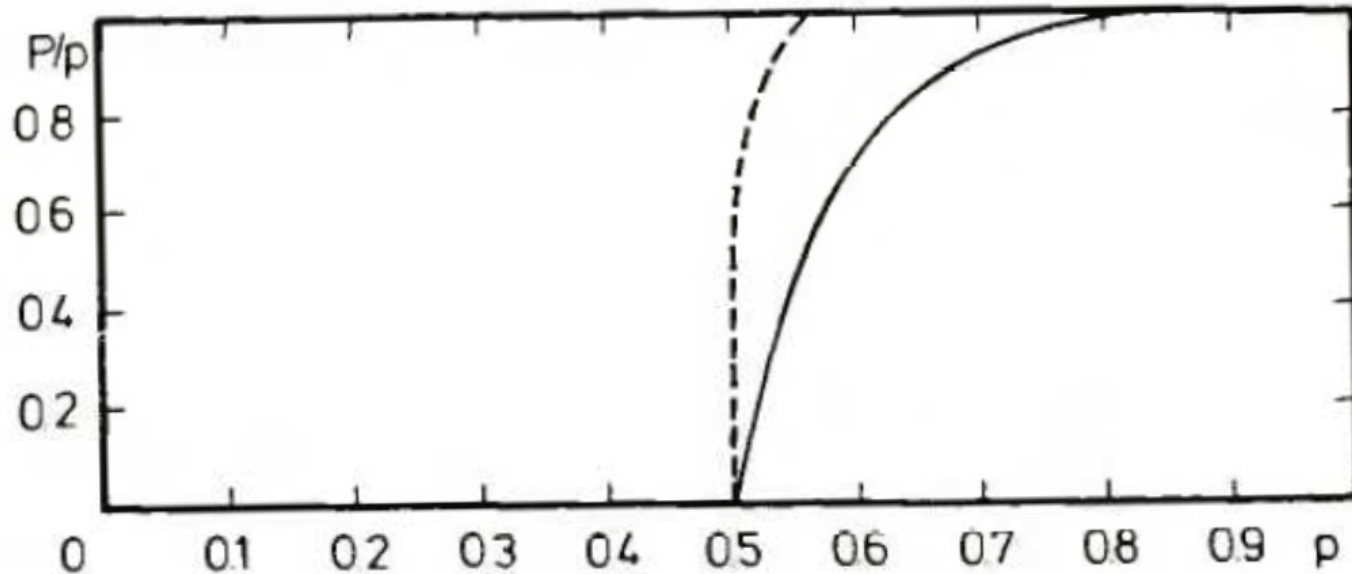
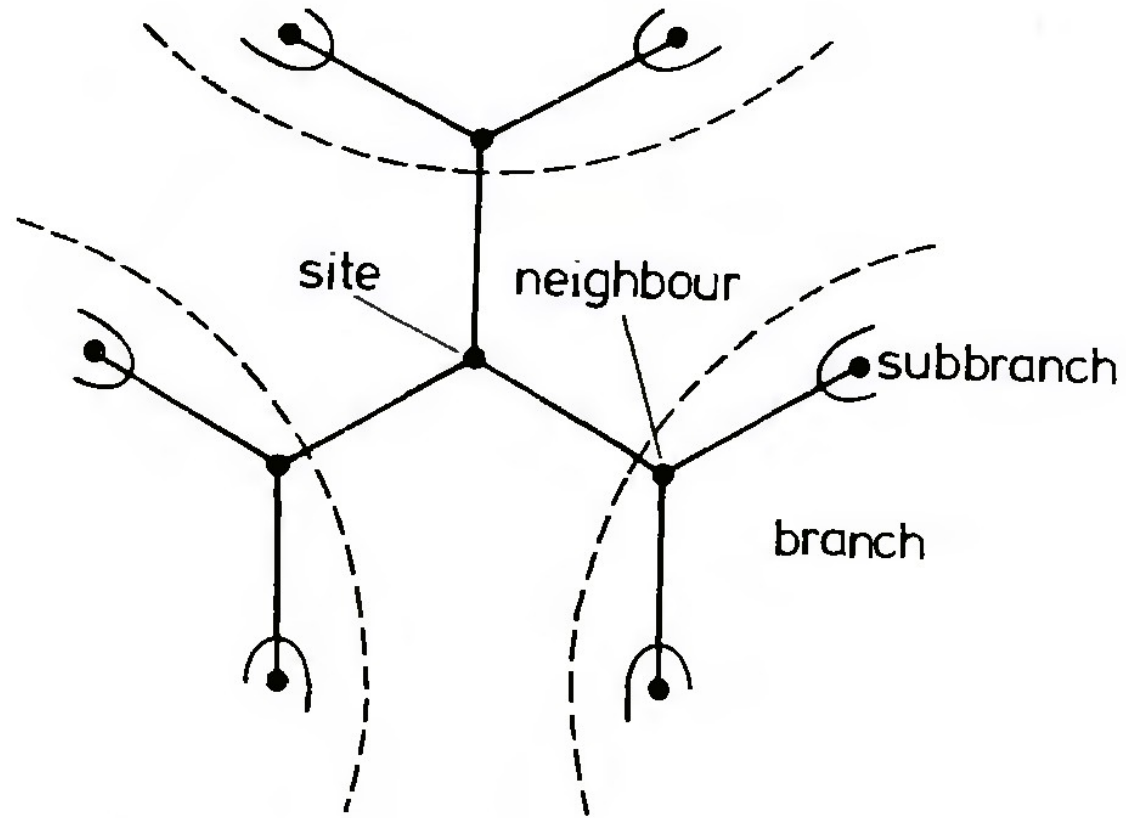


Fig. 11. Order parameter  $P$  (strength of the infinite network) versus concentration  $p$ , in the Bethe lattice with  $z = 3$ . From equation (16) shown as a solid line and compared with computer simulations of the triangular lattice (dashed line). In both cases the threshold is at  $p_c = 1/2$ .

# Red de Bethe



# Cual es la dimension "efectiva" de una red de bethe?

## **Relacion Area-Volumen**

Sea una esfera en  $d$  dimensiones, el volumen es proporcional a

$$V \propto r^d \Rightarrow r \propto V^{1/d}$$

#

El area de la esfera es proporcional a  $r^{d-1}$ , entonces

$$A \propto r^{d-1} \Rightarrow A \propto V^{(d-1)/d} = V^{(1-1/d)}$$

de donde

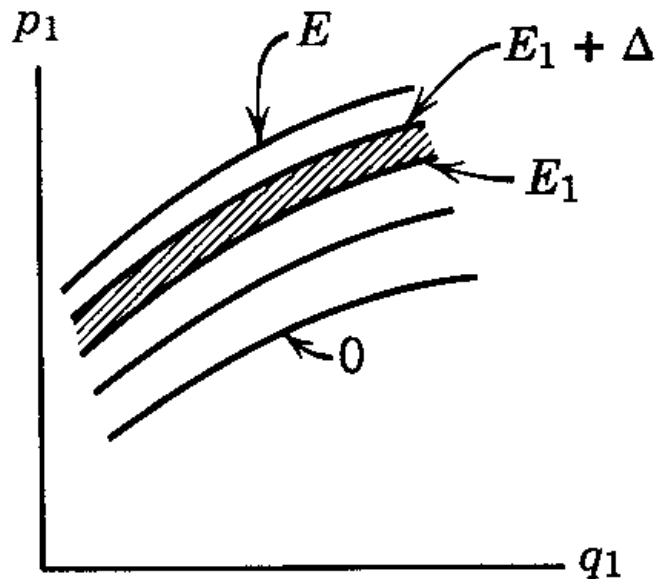
$$\text{si } d \rightarrow \infty \Rightarrow A \propto V$$

Recordar que para la entropia de Boltzmann

$$S = k \log \Gamma = k \log \Sigma$$

$$\text{con } \left[ \Gamma = \iint_{E < H < E + \Delta} d^{3N}q d^{3N}p \right] \text{ y } \left[ \Sigma = \iint_{H < E + \Delta} d^{3N}q d^{3N}p \right]$$

$$N \sim 10^{23}$$



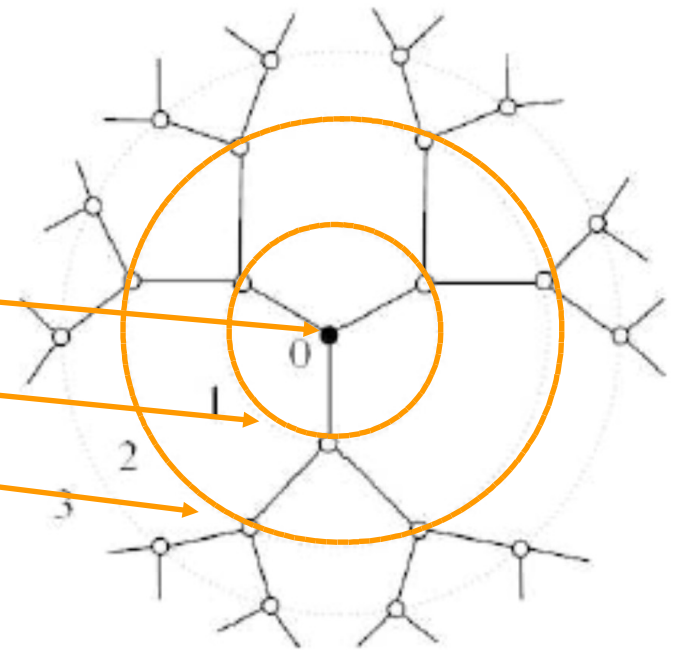
$$H = H(p, q)$$

6N dimensiones  
 $N \sim 10^{23}$

Para la red de Bethe  $V$  es la masa o numero de nodos. Si empezamos desde algun nodo (cualquiera es siempre el central)

tenemos que

nodo		masa
central	→	1
capa 1	→	$z$
capa 2	→	$z(z - 1)$
capa 3	→	$z(z - 1)^2$
capa 4	→	$z(z - 1)^3$
capa ...	→	...



Entonces la masa o volumen es

$$V = 1 + \sum_{n=0}^m z(z-1)^n = \begin{cases} -\frac{z}{z-2} + z \frac{(z-1)^{m+1}}{z-2} + 1 & \text{si } z \neq 2 \\ 2m + 3 & \text{si } z = 2 \end{cases}$$

“origen”

n=0 es la primer capa

Donde el 1 corresponde al nodo central y se suma sobre las capas

Recordemos que  $n = 0$  corresponde a  $r = 1$  (o sea con la primer capa)

Entonces para  $z = 3$

$$V = -3 + 3 \frac{(2)^{m+1}}{1} + 1 = 3(2^r) - 2$$

El area seria el conjunto de nodos en la ultima capa  $\Rightarrow$

$$A = z(z - 1)^{r-1} = 3(2^{r-1})$$

Cuando  $r$  es muy grande tenemos

$$V \sim 3(2^r) = 2A$$

o sea que se comporta como el caso de  $d = \infty$

$$V = -3 + 3 \frac{(2)^{m+1}}{1} + 1 = 3(2^r) - 2$$



En general planteando  $V/A$  (Maple)

$$V/A = \frac{-\frac{z}{z-2} + z\frac{(z-1)^r}{z-2} + 1}{z(z-1)^{r-1}} = \left[ \frac{1}{z} (z(z-1)^r)(z-1)^{1-r} \right] / (z-2)$$

obtenemos :

$$\frac{\left[ \frac{1}{z} (z(z-1)^r)(z-1)^{1-r} \right]}{(z-2)} \rightarrow \frac{(z-1)}{(z-2)} = V/A$$

que es una constante.

## Por la proba de un loop

Consideremos una red cuadrada bidimensional sobre la que se desarrolla una caminata al azar que es self-avoiding.

Pensemos en el loop mas pequeño ( 4 pasos)

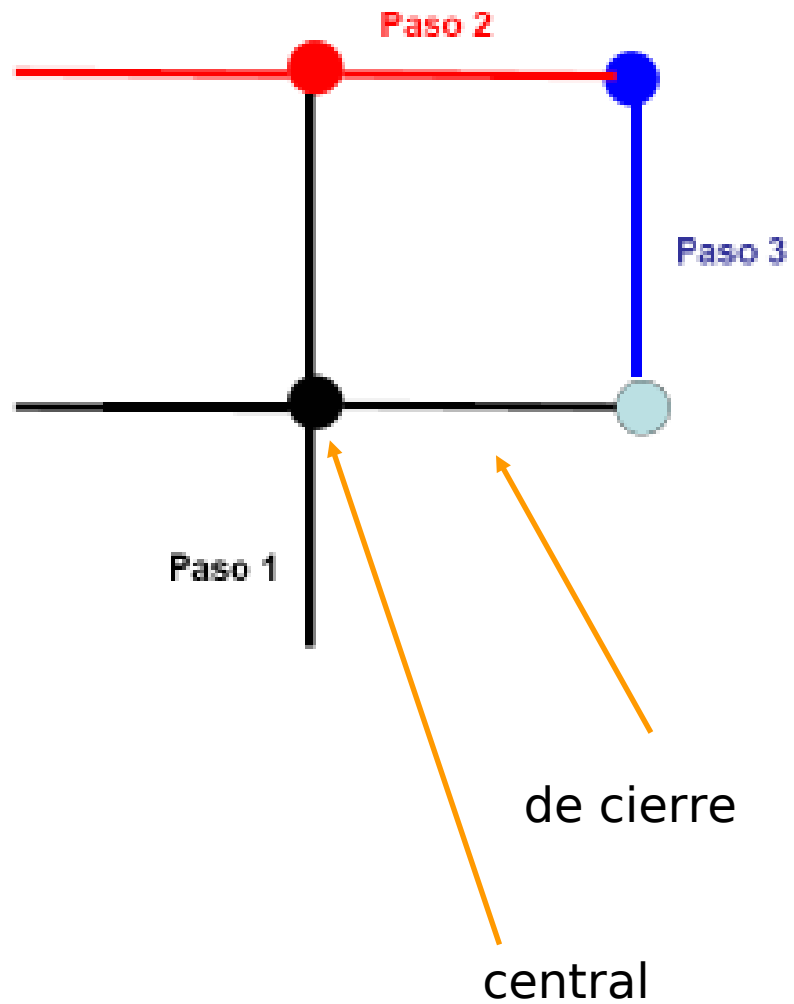
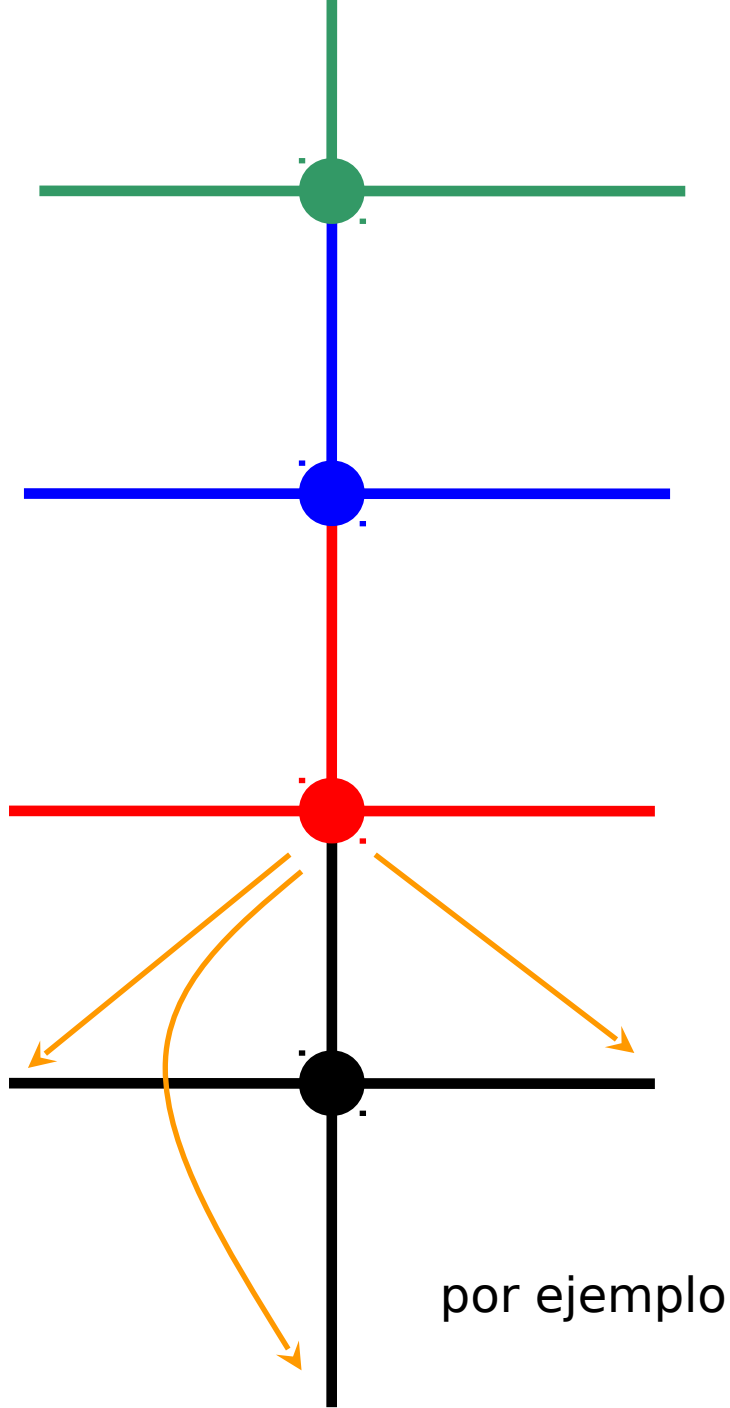
El numero de “estructuras”, abiertas o no, al colocar es:

Entonces

-Si es bidimensional para el primer paso tengo 4 opciones	$2d$
-para los siguientes tengo 3 en cada caso (no puedo volver)	$2d - 1$
-para el siguiente tengo 3 en cada caso	$2d - 1$

Cuantos dan loop? → para obtener loop:

-Si es bidimensional para el primer paso tengo 4 opciones	$2d$
-para los siguientes tengo 2 en cada caso	$2d - 2$
-para el siguiente tengo 1 en cada caso	1

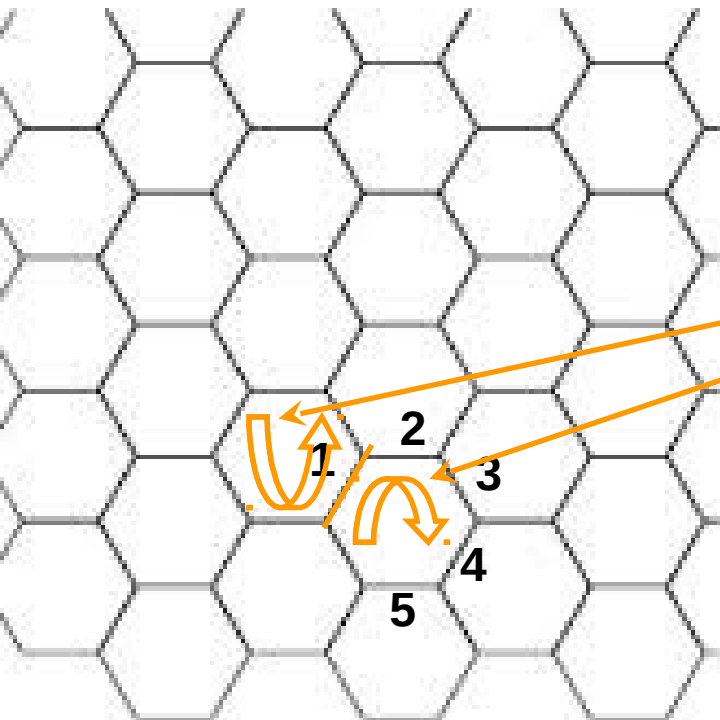


un poco mas elegante

Entonces

- Si es bidimensional para el primer paso tengo 4 opciones
- para los siguientes tengo  $z - 1$  en cada caso (no puedo volver)
- para el siguiente tengo  $z - 1$  en cada caso
- .....

**esto depende de la red sustrato donde pueda desarrollar la red de coordinación  $z$**



en cuanto elijo este paso ya no tengo mas opciones

Cada paso es tal que

$$d_{0i} = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$$

Sea mínimo

Entonces el cociente del numero de loops respecto del numero de caminos va como:

$$\mathfrak{R} = \frac{2d [2d-2]}{2d [2d-1]^3} = \frac{[2d-2]}{[2d-1]^3}$$

**con d muy grande**

(dejamos la cuadrada)

Proba de un loop

$$\mathfrak{R} = \frac{[2d]}{[2d]^3} = \frac{1}{d^2}$$

$$\mathfrak{R}_{d \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Precisamente en la red de Bethe no hay loops por construccion.

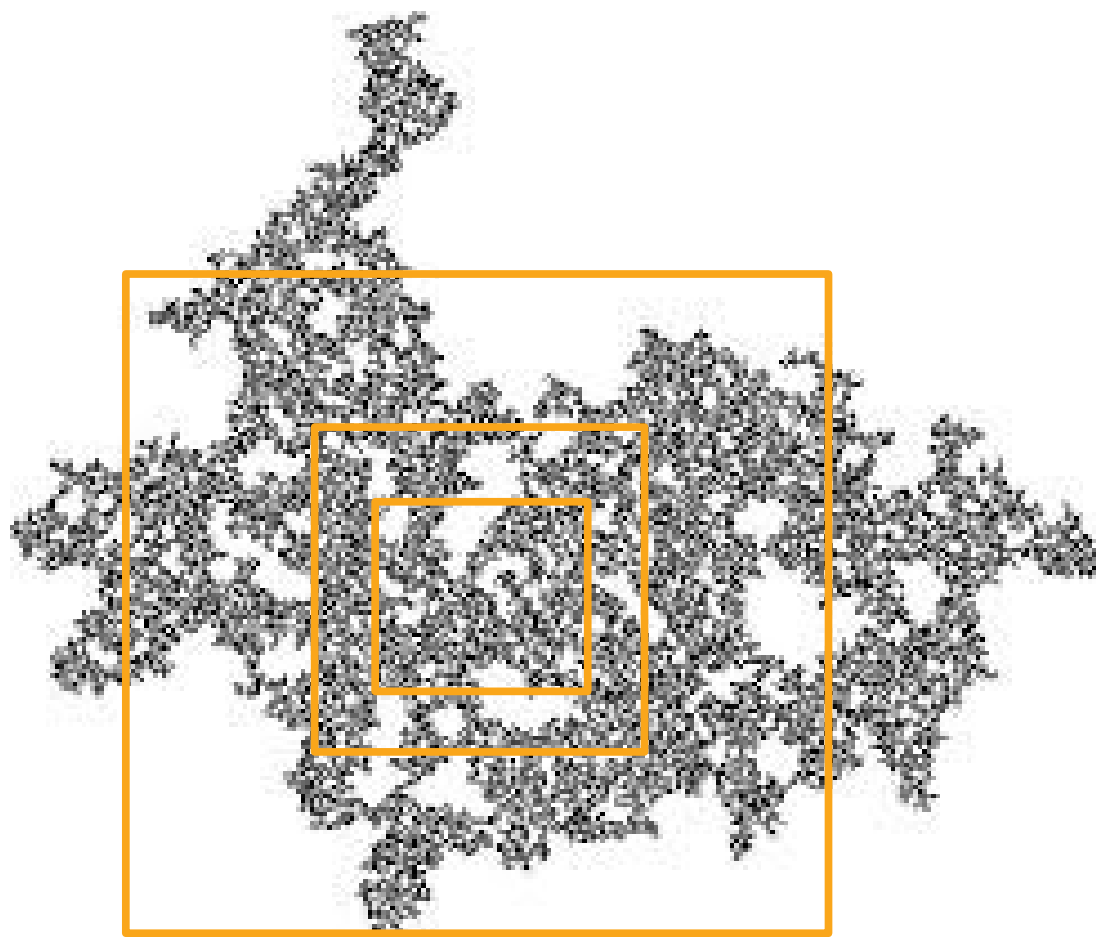
## *Dimension fractal*

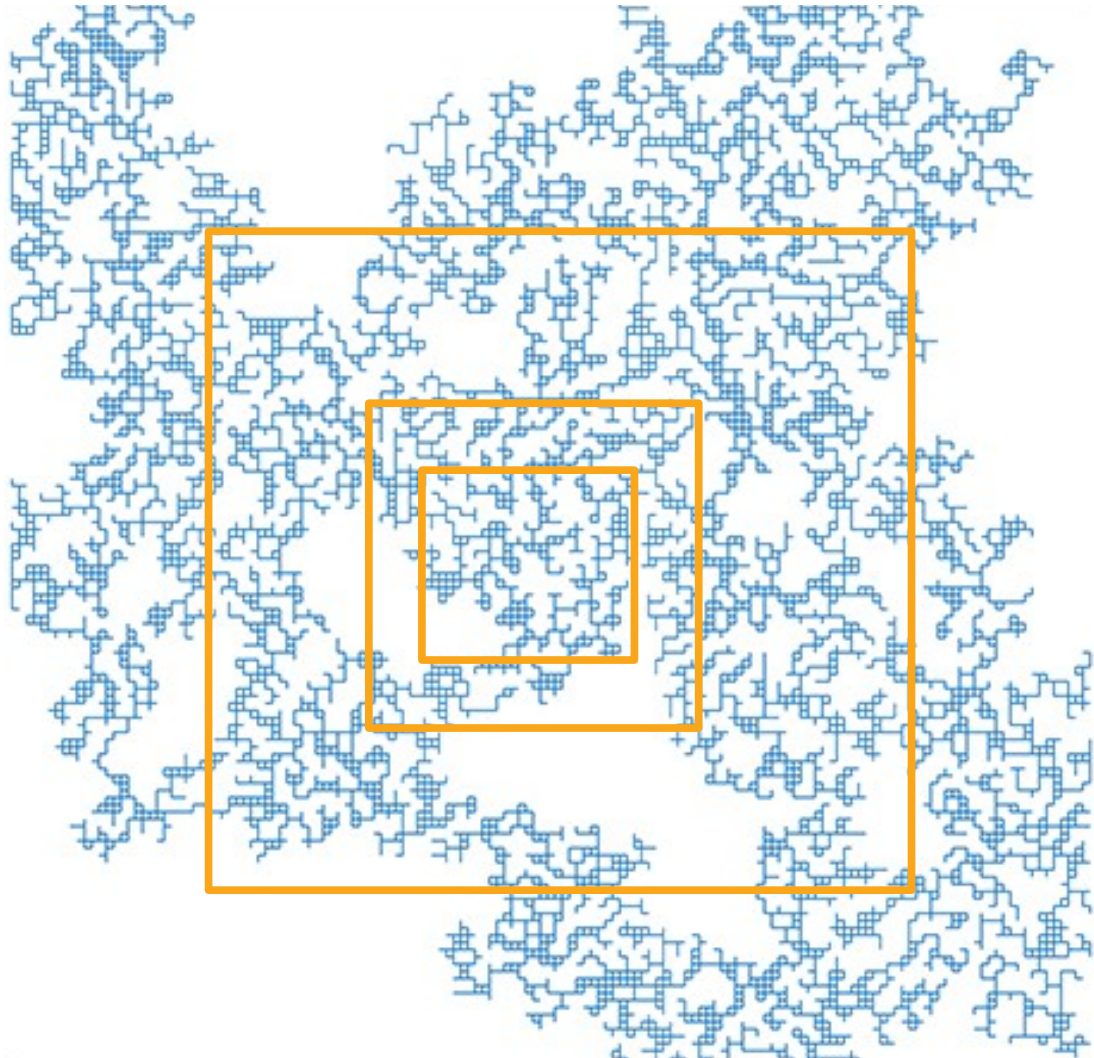
-Supongamos un problema de 2 dimensiones en una red cuadrada

-Supongamos que tomamos el cluster mas grande

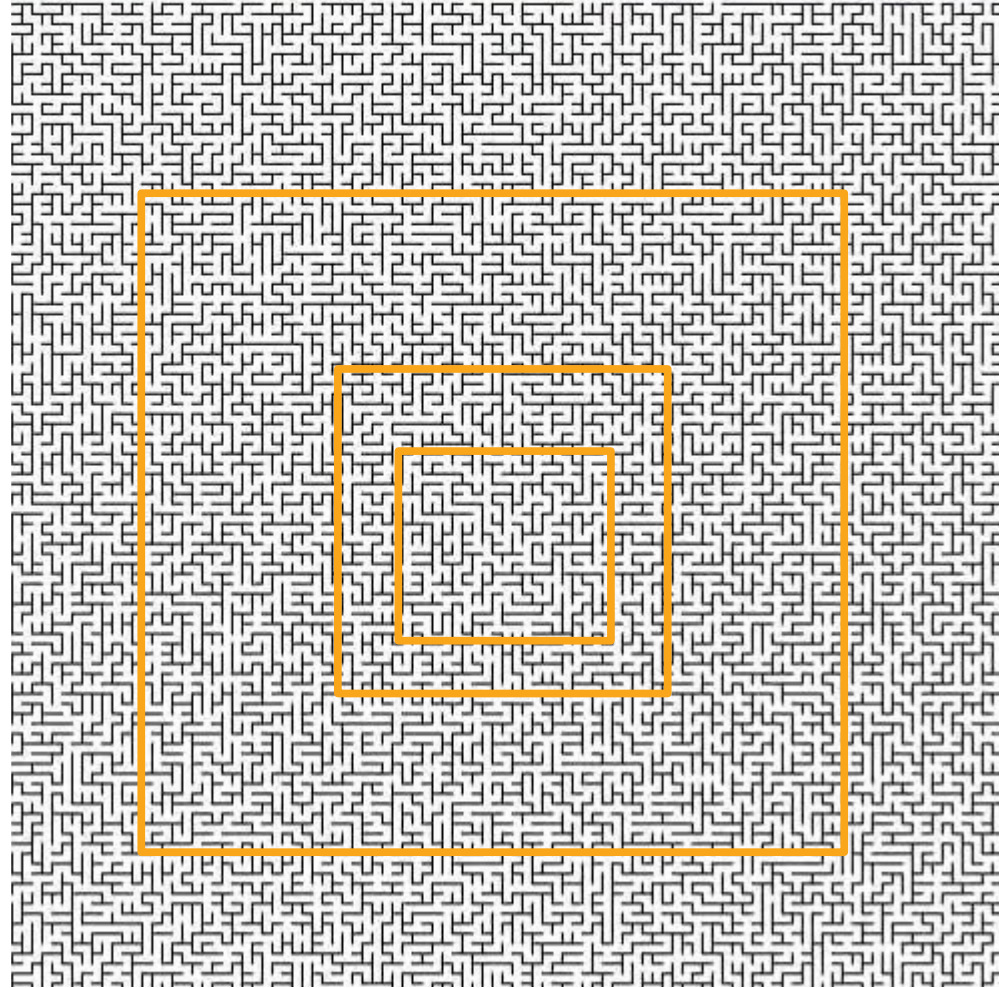
-Supongamos que trabajamos sobre una lattice cuadrada de tamaño  $L^2$

o en su defecto que tomamos una red infinta y la observamos sobre una ventana de tamaño  $L^2$ .









-Variamos  $L$  y calculamos la masa en el cuadrado  $M(L)$  (dada la topología)

El resultado es :

Tiene tamaño finito!

$M(L) \quad \widetilde{L \rightarrow \infty}$	$\ln L$	para $p < p_c$
	$L^D$	para $p = p_c$
	$L^E$	

Para el caso bidimensional cuadrado

$$D = 1.89 \text{ y } E \sim d \quad \longrightarrow \quad D < d !$$

con  $d = 2$  dimension del problema

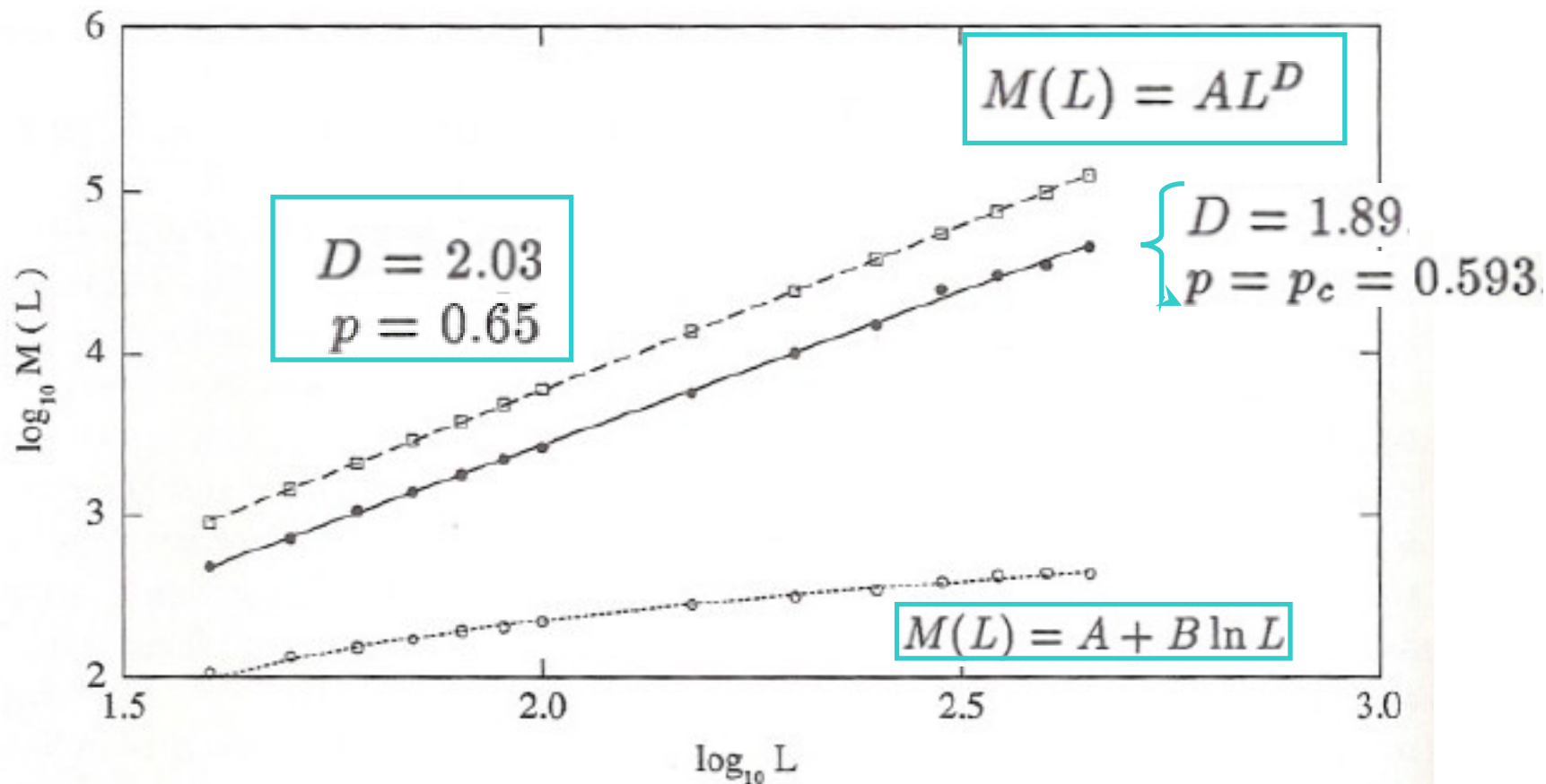
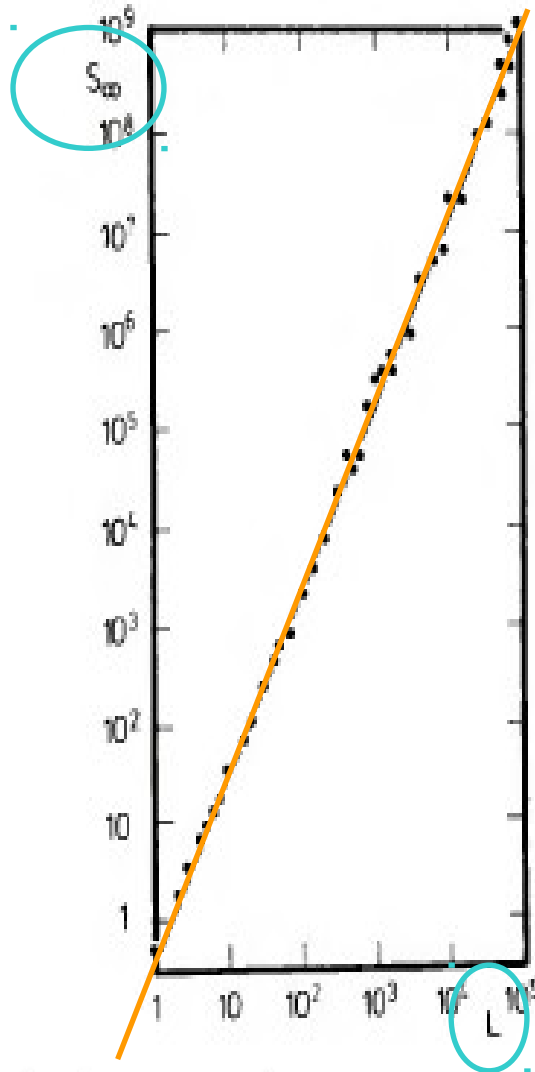


FIGURE 7.4: The mass of the largest cluster as a function of the linear dimension  $L$  of the quadratic lattice. Filled circles are for  $p = p_c = 0.593$ . The solid line is  $M(L) = AL^D$  with  $D = 1.89$ . For  $p = 0.65$  (open boxes) a fit (dashed line) gives  $D = 2.03$ . The results for  $p = 0.5$ , i.e., below  $p_c$ , have been fitted to the form  $M(L) = A + B \ln L$ , shown as the dotted line through the open circles.

Red Triangular

$$p_c = 0.5$$

$$D = 91/48 = 1.895$$

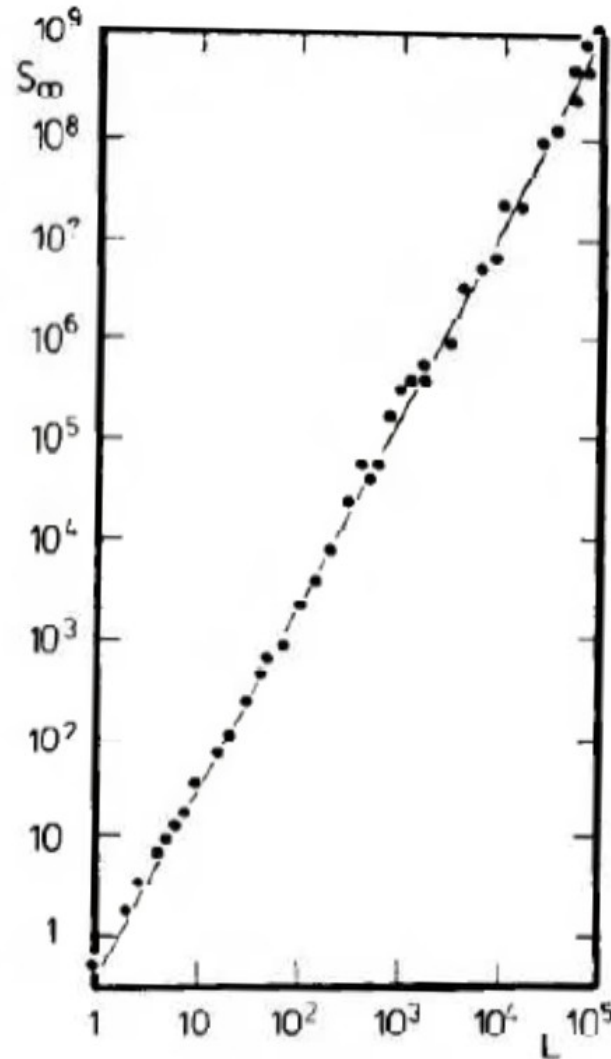


tamaño del cluster  
percolante en el  
umbral de percolacion  
en terminos de la  
dimension lineal  $L$   
de la red

Entonces para nuestros clusters asumimos

$$R_s \propto s^{1/D} \quad (p = p_c ; s \gg 1)$$

S(L)



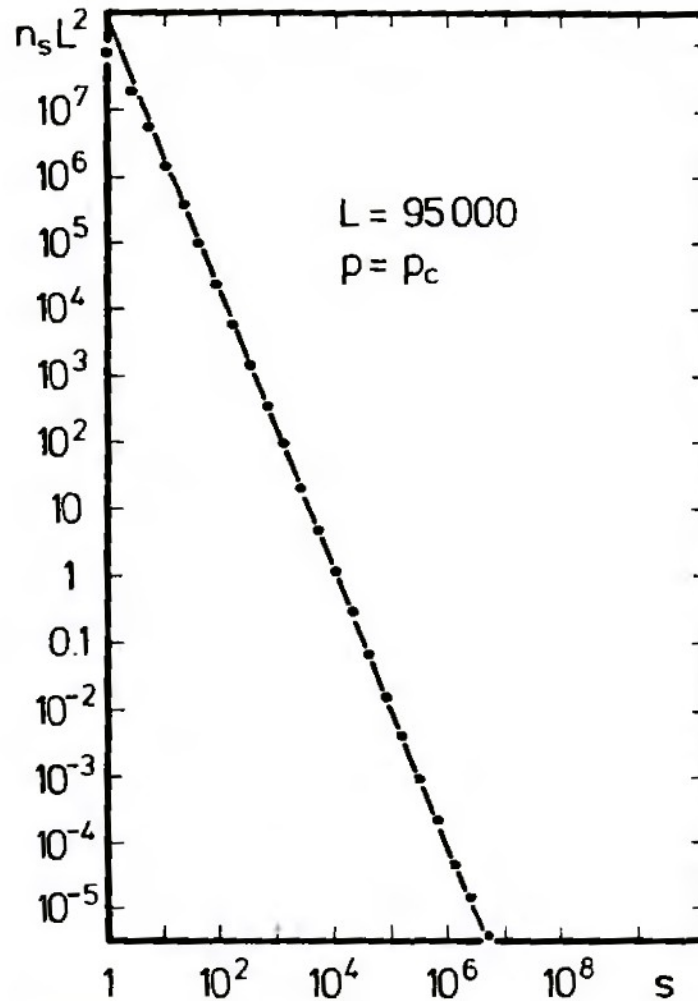
Dimensión Fractal

$$D = \frac{91}{48} \approx 1.9$$

Fig. 15. Monte Carlo data for the size of the largest cluster at the site percolation threshold  $p = p_c = 1/2$  of the triangular lattice, as a function of the linear dimension  $L$  of the lattice. The slope of this log-log plot for large sizes gives the fractal dimension  $D = 91/48 \approx 1.9$ .

b)  $n_s(p_c)$

Calculo de  $\tau$



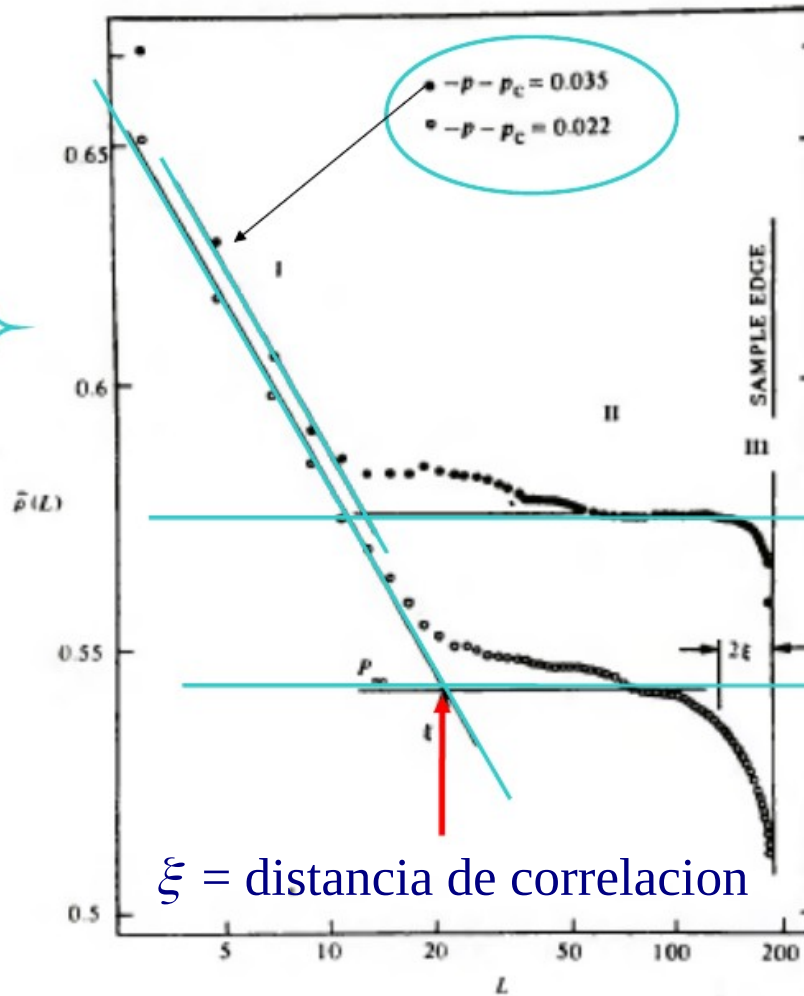
$$n_s(p_c) \propto s^{-\tau}$$

Fig. 12. High-quality data on cluster numbers at the percolation threshold, based on one simulation of a  $95\,000 \times 95\,000$  triangular lattice. The slope of the straight line in this log-log plot gives  $-\tau$ , the Fisher exponent of Eq. (20). From Margolina *et al.* (1984); see also Rapaport (1985, 1992).

# Analisis del cluster finito mas grande para $p > p_c, p \sim p_c$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$\frac{L^D}{L^d} = L^{(D-d)}$$



$\xi$  = distancia de correlacion

Kapitulnil et.al  
 J.Phys. A  
 16 L 269 1984



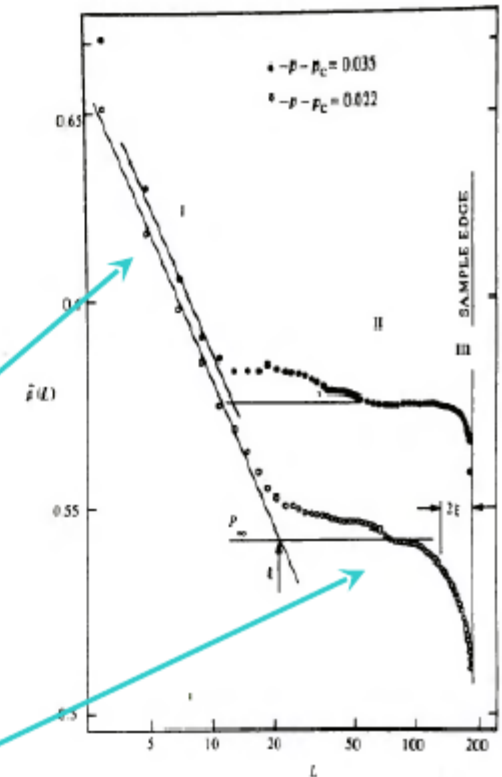
Vemos que hay dos regimenes bien diferenciados e indica que la Masa va como

-Por debajo de la distancia de correlacion  $\xi$  va como  $L^D$ . Las rectas van como

$$D - d = -0.1$$

-Por encima de  $\xi$  alcanzan una cte (mientras estemos mas o menos lejos de la superficie) o sea

$$D - d = 0$$

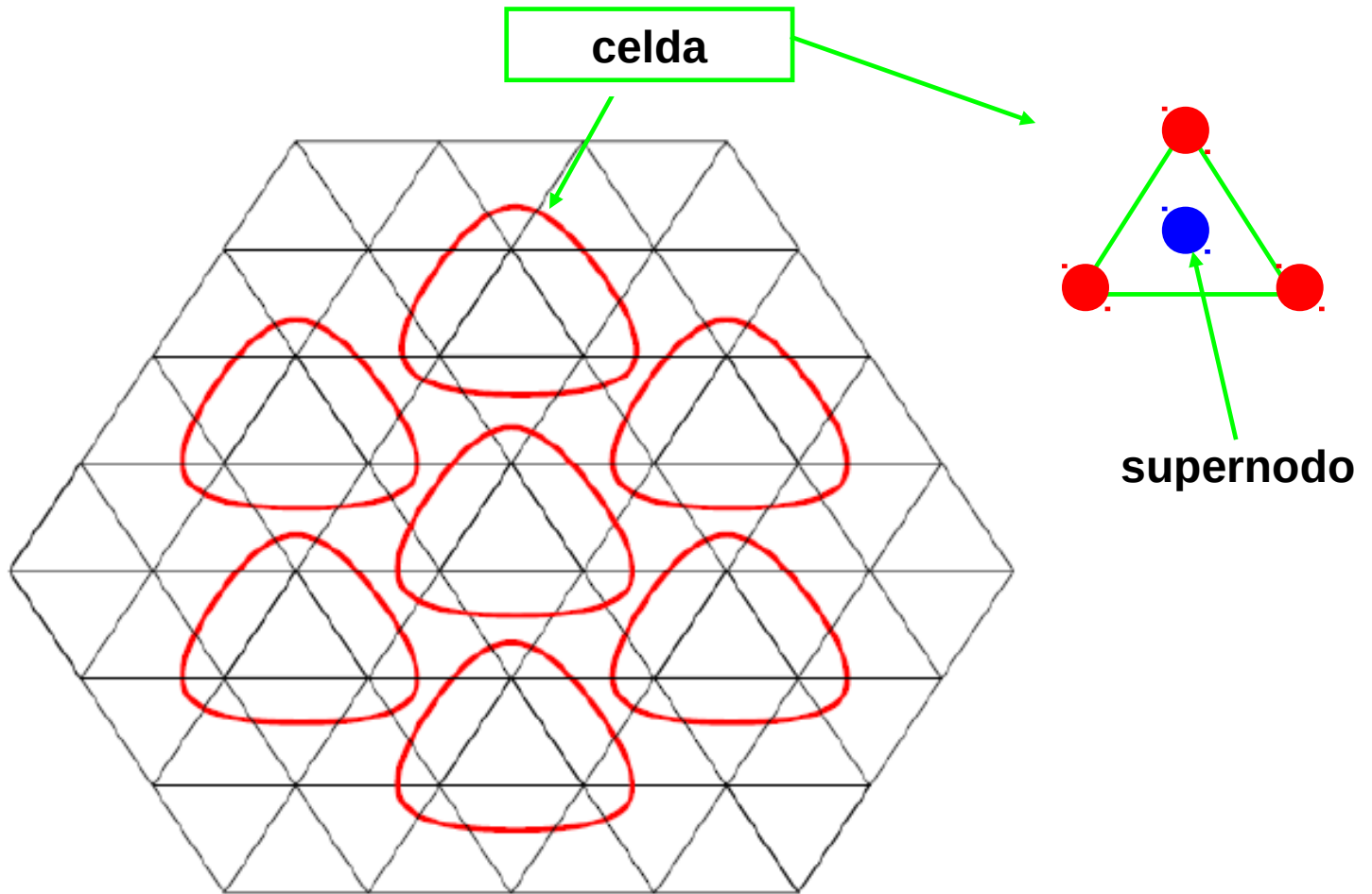


$\xi$  = distancia de correlacion

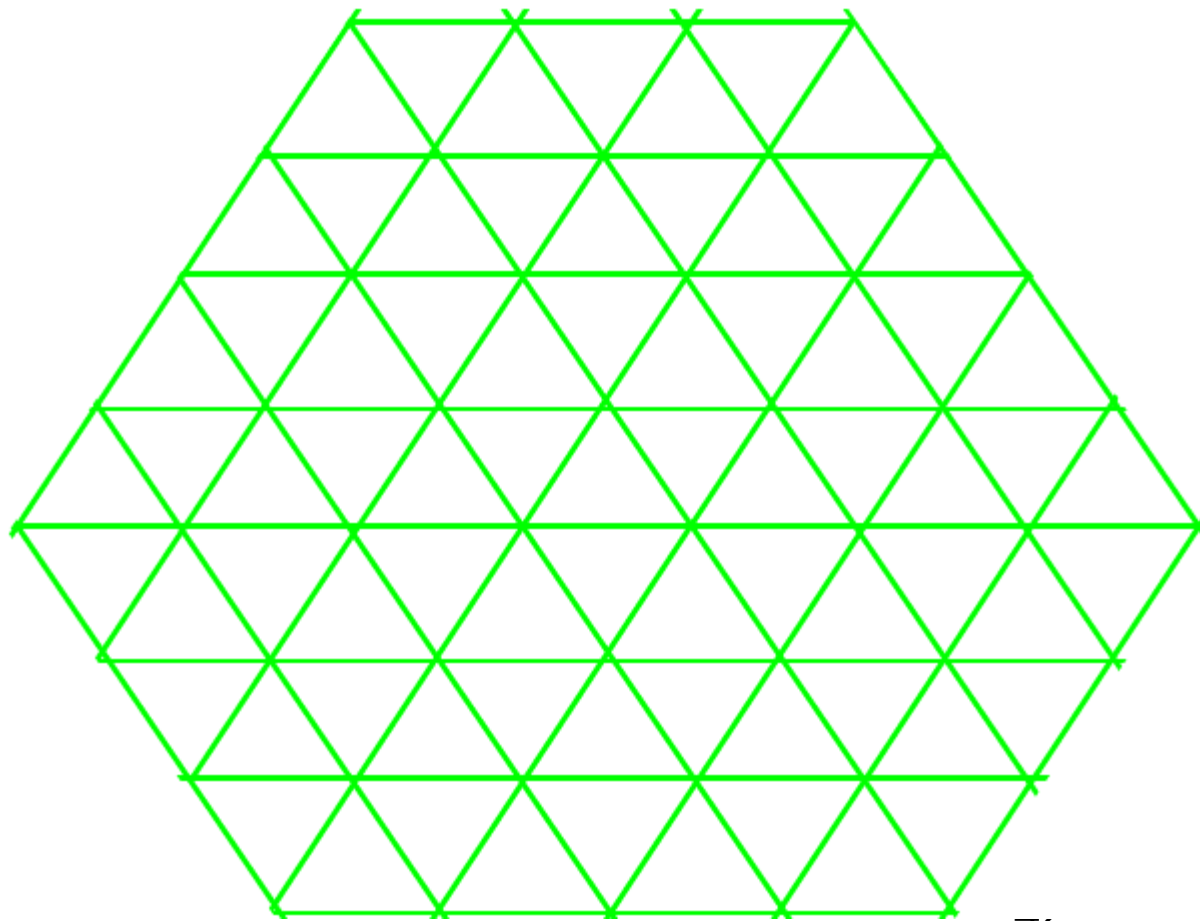


# Renormalizacion en percolacion

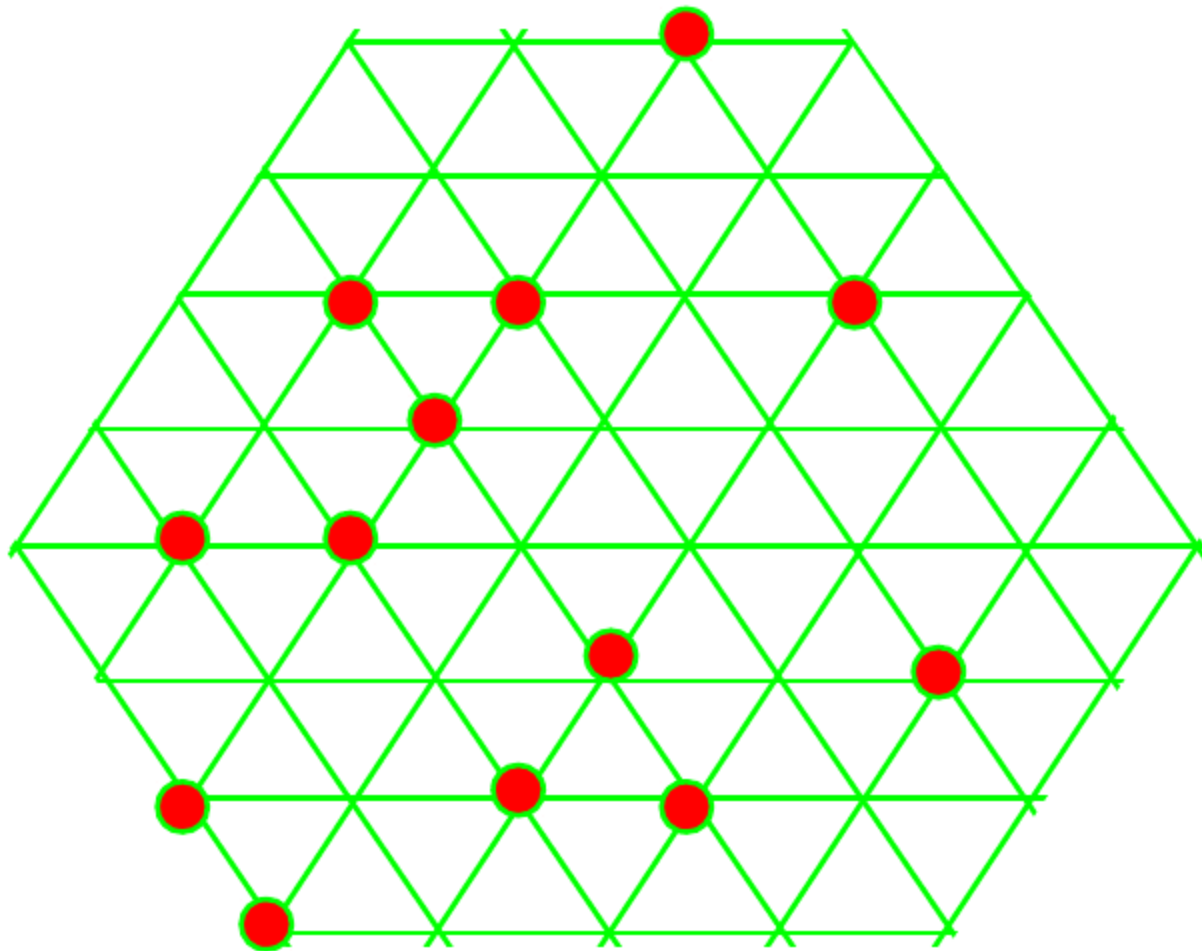
Sea una red triangular



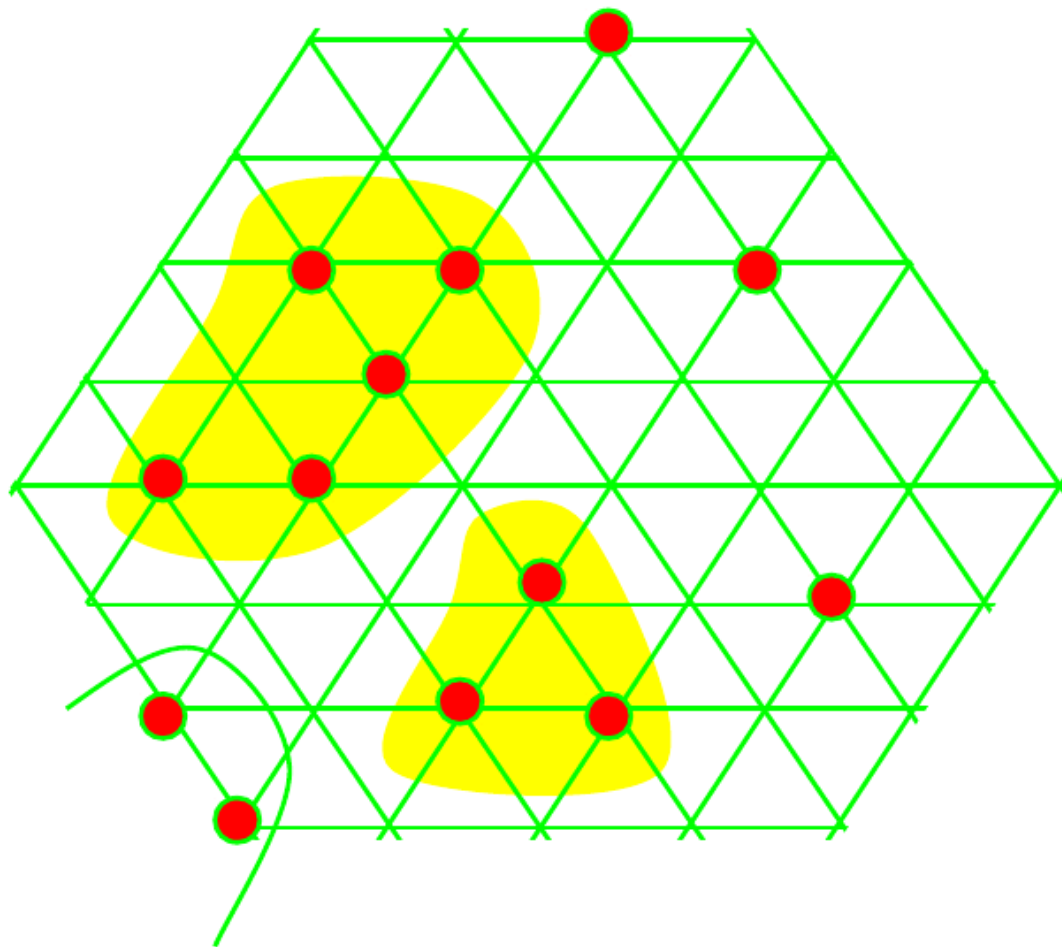
## Red "vacía"



**Activamos nodos  
Con probabilidad  $p$**



## Reconocemos clusters



## Renormalizacion de celda pequeña en percolacion

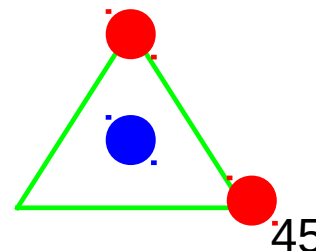
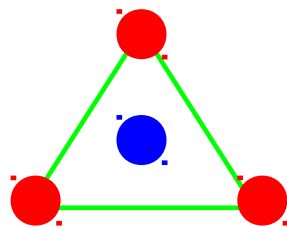
La distancia de correlacion se comporta en la vecindad del punto critico como:

$$\xi = (p - p_c)^{-\nu} \quad \#$$

En el punto critico el cluster percolante es autosimilar?

- Supongamos un proceso en el cual dividimos nuestra lattice en celdas y a cada celda le asignamos estado ocupado o vacio con algun criterio.

- Pensamos en la red triangular, formamos celdas con tres nodos que forman triangulos. El resultado de aplicar esto sobre toda la red y el resultado es una nueva red triangular.



En este caso estamos escalenado con una "distancia tipica"  $b = \sqrt[3]{3}$  pues  $b^2 = 3$  que es el numero de nodos que contiene la celda.

$$b \ll \xi$$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estaran ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupacion de estos nuevos supernodos es

$$p' = p^3 + 3p^2(1 - p)$$

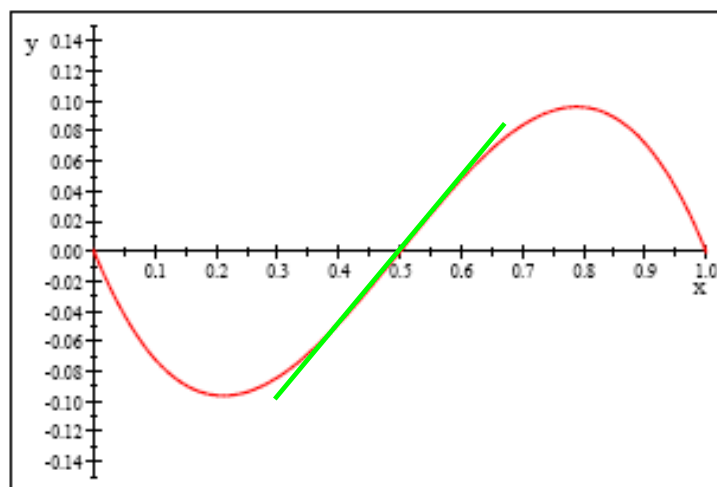
Donde

$p^3$  corresponde a la proba de tener los 3 nodos originales ocupados



$p^2(1-p)$  es la proba de tener 2 ocupados y 1 vacio. El 3 enfrente corresponde a las 3 posibles formas de hacer esto

Si estudiamos  $(p' - p)$  vemos que:



De donde se ve que  $p'$  es invariante para  $p = 0$  y  $p = 1$ , que son triviales (la vacia queda vacia y la llena queda llena).

Pero hay otro punto interesante que es  $p = 0.5 = p_c$  es decir el

punto critico donde esta el cluster percolate que es una fractal es tambien invariante!

A la  $p$  invariante la llamamos punto fijo  $p^*$

( realizo un "escaleo" en el espiritu anterior

Vemos aqui que al cambiar la dimension de la red en  $b$  la dimension lineal de la lattice pasa a ser  $L/b$ .

La masa del cluster en la nueva lattice es

$$M(L/b) \propto (L/b)^D$$

$$M(L) \propto L^D$$

dim. fractal #

entonces

$$M(L) = b^D M(L/b) \quad \#$$

pero esto significa que  $M(L)$  es una funcion homogenea, luego

$$M(L) \propto L^D \quad \#$$

O sea una ley de potencias



Que pasa con la distancia de correlación ante el proceso de renormalización

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformación de escala

$$\xi' = \xi/b$$

De donde

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \ln(b) + \ln(|p' - p_c|^{-\nu}) &= \ln(|p - p_c|^{-\nu}) \\ \Rightarrow -\nu[\ln(|p - p_c|) - \ln(|p' - p_c|)] &= \ln(b) \Rightarrow \end{aligned}$$

Si  $\xi$  es FINITO al hacer la transformación  $\xi'$  es mas pequeño  $\Rightarrow$  nos alejamos del punto critico!!!

$$\frac{1}{v} = \ln[(p' - p_c)/(p - p_c)] \frac{1}{\ln(b)} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

De donde

$$\frac{(p' - p_c)}{(p - p_c)} = \frac{dp'}{dp} = \lambda$$

Volviendo al caso de la red triangular en celda pequeña obtenemos que podemos escribir  $p'$  en un entorno de  $p^*$  como (desarrollo lineal)

$$\begin{aligned} p' &= p^* + (dp'/dp)(p - p^*) + O(p - p^*) \\ &= p^* + \lambda(p - p^*) + O(p - p^*) \end{aligned}$$

Calculando  $\lambda$  obtenemos:

$$\lambda = (dp'/dp) = 3p^2 + 6p(1 - p) - 3p^2 = 6p(1 - p)$$

$$(p' = p^3 + 3p^2(1 - p))$$

En  $p_c = 1/2$  obtenemos  $3/2$  de donde

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln \lambda}{\ln b} = \frac{\ln(1.5)}{\ln(\sqrt[3]{3})} = 0.73814 \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{1}{0.73814} = 1.3548$$

Resulta que se parece al valor exacto  $\nu = 4/3$  (J. Phys.A12,(1979),1857. )

# Kadanoff y la función de correlación

## Modelo de nodos

Sea

$$g^{(2)}(r, \epsilon) \equiv \langle (s_i - \langle s \rangle)(s_j - \langle s \rangle) \rangle = \langle s_i s_j - s_i \langle s \rangle - s_j \langle s \rangle + \langle s \rangle^2 \rangle \\ = \langle s_i s_j - \langle s \rangle^2 \rangle$$

## Modelo de celdas

Sea  $g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) \equiv \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle)(\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle$

con  $\tilde{r} = r/L$

$$g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) = \dots$$

# Kadanoff y la función de correlación

## Modelo de nodos

Sea

$$g^{(2)}(r, \epsilon) \equiv \langle (s_i - \langle s \rangle)(s_j - \langle s \rangle) \rangle = \langle s_i s_j - s_i \langle s \rangle - s_j \langle s \rangle + \langle s \rangle^2 \rangle \\ = \langle s_i s_j - \langle s \rangle^2 \rangle$$

## Modelo de celdas

Sea  $g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) \equiv \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle)(\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle$

con  $\tilde{r} = r/L$

$$g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) = \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle)(\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle$$

# Kadanoff y la función de correlación

## Modelo de nodos

Sea

$$g^{(2)}(r, \epsilon) \equiv \langle (s_i - \langle s \rangle)(s_j - \langle s \rangle) \rangle = \langle s_i s_j - s_i \langle s \rangle - s_j \langle s \rangle + \langle s \rangle^2 \rangle \\ = \langle s_i s_j - \langle s \rangle^2 \rangle$$

## Modelo de celdas

Sea  $g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) \equiv \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle)(\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle$

con  $\tilde{r} = r/L$

$$g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) = \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle)(\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle$$

Sea

$$g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) = \langle (\tilde{s}_\alpha - \langle \tilde{s} \rangle) (\tilde{s}_\beta - \langle \tilde{s} \rangle) \rangle$$

Que define al parametro como no todos los spines estan perfectamente alineados

$$L^{-d} \sum_{i \in \alpha} s_i = \mathcal{L} \tilde{s}_\alpha$$

Con  $\tilde{s}_\alpha = \pm 1$

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) &= \frac{1}{L^{2d} \ell^2} \sum_{i \in \alpha} \sum_{j \in \beta} [\langle s_i s_j \rangle - \langle s \rangle^2] \\ &= \frac{1}{L^{2d} \ell^2} L^{2d} [\langle s_i s_j \rangle - \langle s \rangle^2] \end{aligned}$$

$$\tilde{s}_\alpha = \frac{1}{L^d \ell} \sum_{i \in \alpha} s_i$$

Luego

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \mathcal{L}^2 g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon})$$

Que pasa con H

(energía según el modelo de celdas)

$$\beta \hat{H}_{cell} = -\tilde{h} \sum_{\alpha=1}^n \tilde{s}_{\alpha}$$

Para los nodos  
(energía según el modelo de nodos)

$$\beta \hat{H}_{nodo} = -h \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i \in \alpha} s_i$$

$$= -h \sum_{\alpha=1}^n \tilde{s}_{\alpha} L^d \mathcal{L} \quad (\text{según se vio})$$

Entonces

$$\tilde{h} = L^d \mathcal{L} h$$

Suma sobre celda

Suma en c/celda



Proponemos ahora que  $\mathcal{L}$  solo depende de  $L$  de la forma  $L^z$  como (como ya vimos)

$$\tilde{h} = H(L)h \quad H(L) = L^x \quad \mathcal{L} = L^z$$

Entonces

$$\tilde{h} = L^d \mathcal{L}h$$

$$z = x - d$$

de donde recordando que

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \mathcal{L}^2 g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon})$$

y

$$\tilde{\epsilon} = L^y \epsilon \quad \text{y} \quad \tilde{r} = r/L$$

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = L^{2(x-d)} g^{(2)}(\tilde{r}, \tilde{\epsilon}) = L^{2(x-d)} g^{(2)}(L^{-1}r, L^y \epsilon)$$

Suponiendo que esto es valido  $\forall L$  obtenemos otra función homogenea.

Si tomamos  $L = (\frac{1}{\epsilon})^{1/y}$ , entonces

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \epsilon^{2(-x+d)/y} g^{(2)}(r\epsilon^{1/y}, 1) = \epsilon^{2(-x+d)/y} f(r\epsilon^{1/y})$$

Si tomamos  $L = (\frac{1}{r})$ , entonces

$$g^{(2)}(r, \epsilon) = \epsilon^{2(x-d)} f(\epsilon r^y)$$

Pero entonces como  $\xi \sim \epsilon^{-\nu}$  y  $g^{(2)}(r, \epsilon = 0) \sim r^{-(d-2-\eta)}$  se obtiene

$$-(d - 2 - \eta) = 2(x - d)$$

$$v = 1/y$$

Usando este tipo de argumentos se obtiene

$$dv = 2 - \alpha$$

("desigualdad" de Josephson)

$$d - 2 - \eta = \frac{2\beta}{v}$$

("desigualdad de Fisher")

ademas

$$(2 - \eta)v = \gamma$$

Que son desigualdades transformadas en igualdades!

# Calculo microscopico de los exponentes criticos

Sea una funcion de particion

$$Z(\mathbf{K}, N) = \sum_{\{s_i\}} \exp(-H\{\mathbf{K}, \{s_i\}, N\})$$

Sea el Hamiltoniano general

$$H\{\mathbf{K}, \{s_i\}, N\} = K_0 + K_1 \sum_i s_i + K_2 \sum_{ij}^{(1)} s_i s_j + K_3 \sum_{ij}^{(2)} s_i s_j + \\ + K_4 \sum_{ij,k}^{(2)} s_i s_j s_k + \dots$$

$\sum_{ij}^{(1)}$  → vecinos inmediatos

$\sum_{ij}^{(2)}$  → vecinos siguientes

K.Wilson Phys. Rev. B 4(1971)3174  
Rev. Mod. Phys. 47(1975)773

**A Modern Course in  
Statistical Physics**

2nd Edition

L. E. REICHL

En la formulacion anterior el caso de ising corresponde a  
 $K_1 = -\beta B ; K_2 = -\beta J ; (K_3, K_4, \dots = 0)$

Ahora se definen los bloques.

Se suma sobre los spines interiores al bloque

$$Z(\mathbf{K}, N) = \sum_{\{S_I, s_I\}} \exp(-H\{\mathbf{K}, \{S_I, s_I\}, N\})$$

$$Z(\mathbf{K}, N) = \sum_{\{S_I\}} \exp(-H\{\mathbf{K}_L, \{S_I\}, NL^{-d}\})$$

$$= Z(\mathbf{K}_L, NL^{-d})$$

Luego de sumar sobre los spines interiores

nuevo  $\mathbf{K}$

numero de "supernodos"

De esta forma la funcion de particion conserva su forma,

entonces (densidad de energia libre por nodo)

$$g(\mathbf{K}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z(\mathbf{K}, N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z(\mathbf{K}_L, NL^{-d}) = \\ = L^{-d} g(\mathbf{K}_L)$$

Mult. por  $[L^{-d}/L^{-d}]$  por escaleo

De aqui se ve que el vector de acoplamiento a pasado de  $\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}_L$ . Escribimos entonces esta transformacion como

$$\mathbf{K}_L = T(\mathbf{K}) \text{ (en general no lineal)}$$

(la forma de la energia puede variar! Pero mantendremos la forma de Z)

El resultado de la transformacion es un conjunto de "super spines" que puede ser transformado nuevamente tantas

veces como se quiera (en ppo.)

$$\mathbf{K}_{nL} = T(\mathbf{K}_{(n-1)L})$$

Si estamos en el punto critico la distancia de correlacion es infinita y el sistema es "transparente" ante la realizacion de la transformacion

Si el sistema no esta en el punto critico ante cada transformacion el rango de la correlacion se reduce y el sistema se comporta como si se alejase del punto critico.



Sea  $\xi$  la distancia de correlacion

Red original  $\Rightarrow$  espaciamento  $a$

Red transformada  $\Rightarrow$  espaciamento  $La$

$$\xi = \xi_L(La) = \xi_1 a \Rightarrow$$

$$\xi_L = \xi_1 / L$$

Como  $\xi_L < \xi_1$  nos alejamos del puento critico del sistema original

Luego estaremos a una nueva temperatura efectiva

De los anterior se ve que en el punto critico el sistema no es alterado por la transformacion  $\rightarrow$  punto fijo

$$\mathbf{K}^* = T(\mathbf{K}^*)$$

Por efecto de la aplicacion de la transformacion el vector  $\mathbf{K}$  se mueve en el espacio de los parametros.

Sea  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(K_1, K_2) \Rightarrow \mathbf{K}_L = T(\mathbf{K})$  y  $\mathbf{K}^*$  corresponde a  $(K_1^*, K_2^*)$

La cuestion es ver como se mueve  $\mathbf{K}$  en la vecindad del punto critico.

Linealizamos  $\mathbf{K}_{nL} = T(\mathbf{K}_{(n-1)L})$  en la vecindad de  $\mathbf{K}^*$

Sea  $\delta\mathbf{K}_L = (\mathbf{K}_L - \mathbf{K}^*)$  y  $\delta\mathbf{K} = (\mathbf{K} - \mathbf{K}^*)$

$\delta\mathbf{K}_L = \mathbb{C}\delta\mathbf{K}$  donde

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_{1L}}{\partial K_1} & \frac{\partial K_{1L}}{\partial K_2} \\ \frac{\partial K_{2L}}{\partial K_1} & \frac{\partial K_{2L}}{\partial K_2} \end{pmatrix}_{K_{1L}=K_1^*, K_{2L}=K_2^*}$$

$\mathbb{C}$  en general es no simétrica

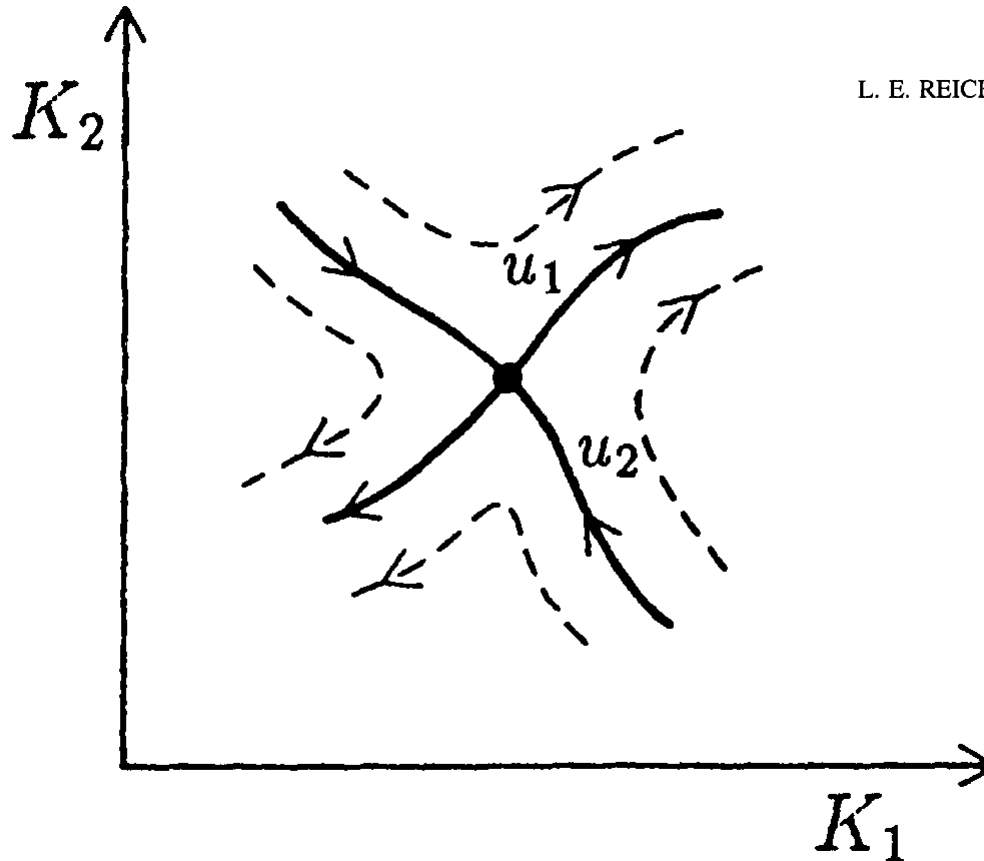
Sean los autovalores  $\delta \mathbf{u}_L = \Lambda \delta \mathbf{u}$

con

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{pmatrix}$$



**Fig. 8.2.** A hyperbolic fixed point with its eigencurves and the flow of points in the neighborhood of the fixed point.

Entonces por aplicacion sucesiva de la transformacion se obtiene

$$\delta u_{nL,1} = \lambda_1^n \delta u_1, \delta u_{nL,2} = \lambda_2^n \delta u_2$$

Entonces si  $\lambda_i > 1$  se aleja y si  $\lambda_i < 1$  se acerca.

Los  $\lambda_i > 1$  se llaman relevantes y se asocian a  $\epsilon$  o  $B$  pues regulan la cercania al punto critico. (por ser los que marcan la invarianza)

Como  $g(\mathbf{K}) = L^{-d}g(\mathbf{K}_L)$

Entonces escribimos la parte singular del potencial

termodinamico como

$$g_s(\delta u_1, \delta u_2, \dots) = L^{-d}g_s(\lambda_1 \delta u_1, \lambda_2 \delta u_2, \dots)$$

Con lo que nos encontramos nuevamente con la formulacion de Widom

Si  $\lambda_i > 1$  usando Widom para Ising

$$g(\epsilon, B) = \frac{1}{\lambda} g(\lambda^p \epsilon, \lambda^q B)$$

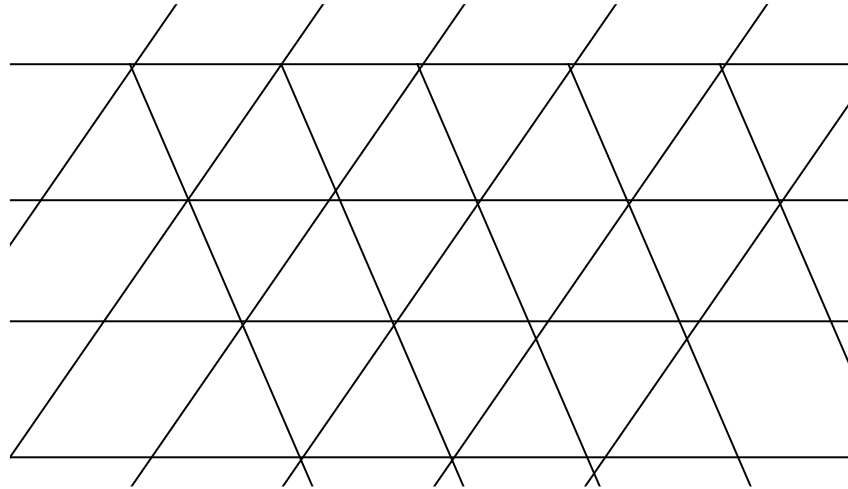
con  $\lambda = L^d$

$$\lambda_1 = L^{dp} \Rightarrow p = \frac{\log \lambda_1}{d \log L}$$

$$\lambda_2 = L^{dq} \Rightarrow q = \frac{\log \lambda_2}{d \log L}$$

identificamos  $\delta u_1 \leftrightarrow \epsilon$   
 $\delta u_2 \leftrightarrow B$

Sea una red bidimensional triangular



## La red triangular

Hamiltoniano original

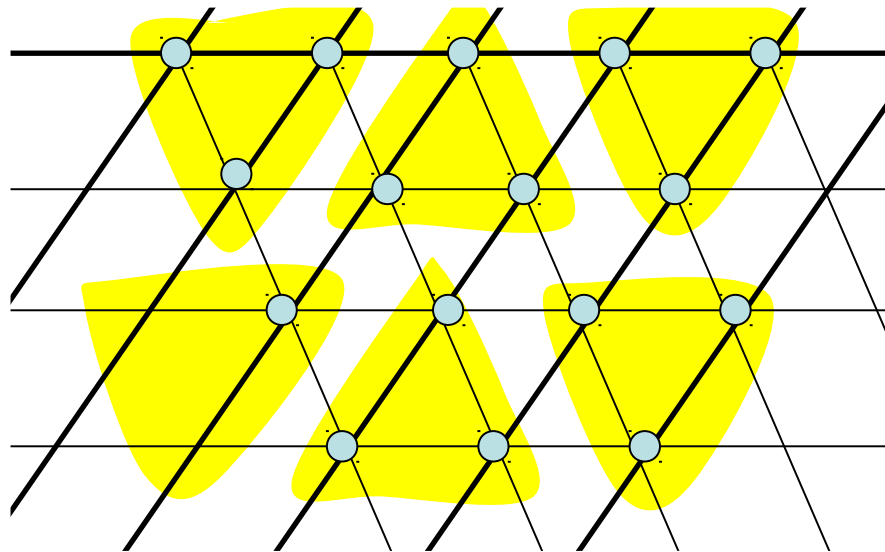
$$H = K \sum s_i s_j - B \sum s_i$$

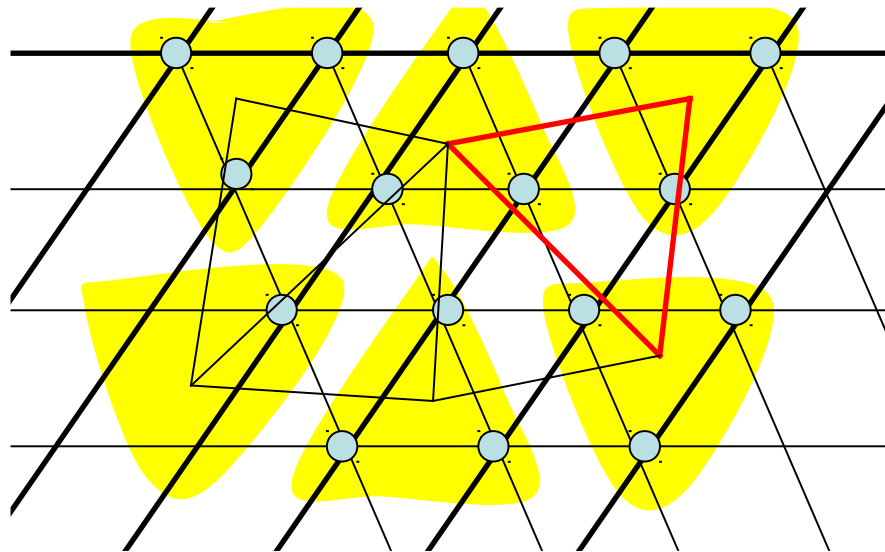
Definimos los dominios triangulares con 3 spines  
(aproximacion de celda pequeña)

Para cada dominio definimos para cada celda

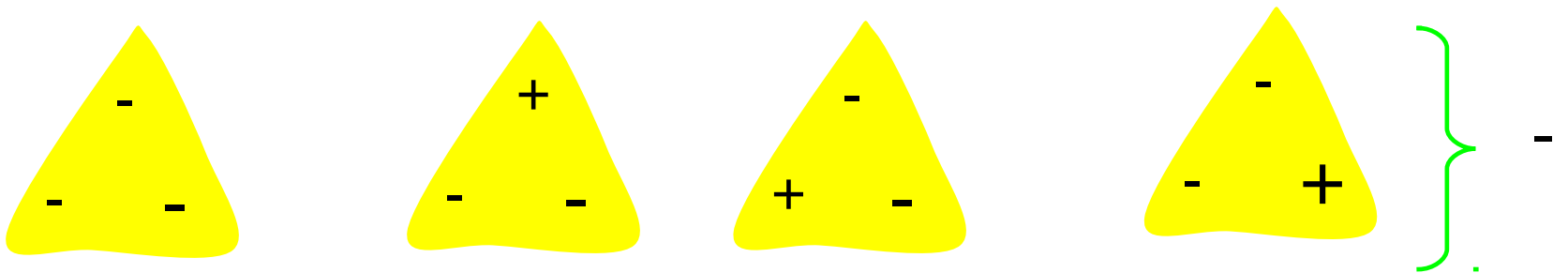
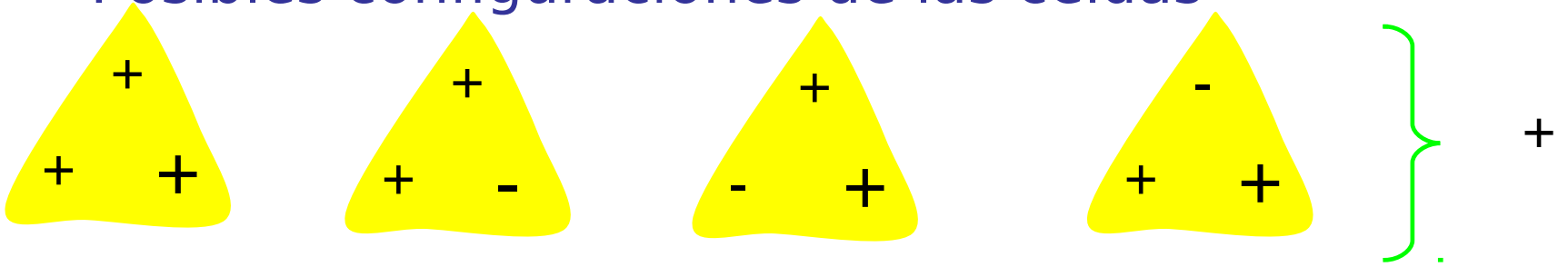
$$S_I = \text{signo}(s_1 + s_2 + s_3)$$







# Posibles configuraciones de las celdas



$$\Rightarrow S_I = \pm 1$$

Sea ademàs para cada celda

$$\sigma_I = |s_1 + s_2 + s_3|$$

$$\Rightarrow \sigma_I = 3, 1$$

El objeto de estudio es  $Z \Rightarrow$

$$Z(K, N) = \sum_{\{S_I\}\{\sigma_I\}} \exp[-H(K, \{S_I\}\{\sigma_I\}, N)]$$

$$Z(K, N) = \sum_{\{S_I\}} \exp[-H(K_1, \{S_I\}, N')] = Z(K_L, N')$$

El trabajo sobre los bloques se refleja en los parámetros del  $H$

$$\text{Sea } H(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = H_0(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) + V(K, \{S_I\} \{\sigma_I\})$$

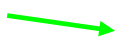
$$H_0(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = -K \sum_I \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} s_i s_j$$

O sea que involucra indices "internos" de cada celda

$$V(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = -K \sum_{I \neq J} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} s_i s_j - B \sum_I \sum_{i \in I} s_i$$

$$V(K, \{S_I\} \{\sigma_I\}) = V_1(s_i, s_j) + V_2(s_i)$$

O sea que involucra terminos de interaccion entre diferentes celdas y terminos de interaccion con el campo  $B$ .

Para sistemas de interaccion de rango corto  $V_1$  es un termino de superficie. El "peso" de este termino sera mayor 

(mas pequeñas)

cuanto menor sean las celdas consideradas. A este termino estaran asociadas  $K_L$  y  $B_L$ .

Sea un operador  $A$  que depende de los spines y por lo tanto  $A = A(\{S_I, \sigma_I\})$

Entonces

$$\langle A \{S_I\} \rangle = \sum_{\{\sigma_L\}} A(\{S_I, \sigma_I\}) \frac{\exp[-H_0(K, \{S_I\}, \{\sigma_I\})]}{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0(K, \{S_I\}, \{\sigma_I\})]}$$

Es un promedio sobre las coordenadas internas con el peso del Hamiltoniano "interno".

Sea ahora

(Sumamos sobre los spines interiores)

$$\begin{aligned}\exp[-H(K_L, \{S_I\})] &= \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H(K_L, \{S_I \sigma_L\})] = \\ &= \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \exp[-V] = \\ &= \frac{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \exp[-V]}{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0]} \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \exp[-V] =\end{aligned}$$

Entonces tenemos para  $\exp[-V]$  un valor medio

$$\frac{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \exp[-V]}{\sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0]} \Rightarrow$$

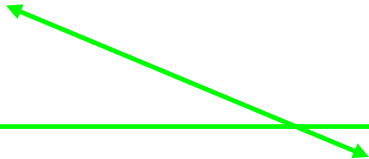
$$\begin{aligned}\langle \exp(V) \rangle_0 &= \langle 1 + V + V^2/2 + \dots \rangle_0 \\ &= \langle 1 \rangle + \langle V \rangle_0 + \langle V^2/2 \rangle_0 + \dots \\ &\approx 1 + x ; x = \langle V \rangle_0 + \langle V^2/2 \rangle_0 + \dots\end{aligned}$$

$V$  es una perturbación (es la parte de superficie)

luego

$$\begin{aligned}\log\langle\exp(V)\rangle_0 &= \log(1+x) \approx x - x^2/2 = \langle V \rangle + \frac{1}{2}\langle V \rangle^2 - \frac{1}{2}\langle V \rangle^2 \dots \\ &= \left[ \langle V \rangle_0 + \frac{1}{2}[V - \langle V \rangle]^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

luego


$$\exp[-H(K_L, \{S_I\})] = \left[ \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] \cdot \exp\langle V \rangle_0 \cdot \exp[V - \langle V \rangle]$$

A orden mas bajo

$$\exp[-H(K_L, \{S_I\})] = \left[ \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] \cdot \exp\langle V \rangle_0$$



luego

$$H(K_L, \{S_I\}) = \log \left[ \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] + \langle V \rangle_0$$

○ Para el primer termino (para bloques independientes)

$$\text{a) } \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0(K_L, \{S_I \sigma_L\})] = [Z_0(K)]^M$$

$$\text{b) } Z_0(K) = \sum_{\sigma} \exp[K(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3)]$$

$$\sigma = 3, 1 \Rightarrow$$

si  $\sigma = 3 \Rightarrow 3K$  una unica configuracion

si  $\sigma = 1 \Rightarrow -K$  y hay 3 configuraciones

Entonces

De un bloque

(hacer la cuenta)

$$Z_0(K) = \exp(3K) + 3 \exp(-K)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \log \left[ \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] &= M \log(Z_0(K)) \\ &= M \log[\exp(3K) + 3 \exp(-K)] \end{aligned}$$

○ Sean ahora los terminos de interaccion

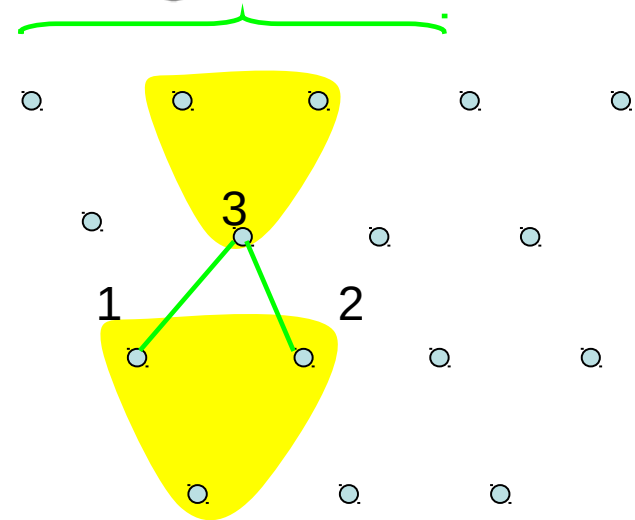
$$V_1(s_i, s_j) + V_2(s_i)$$

Para el primer sumando, un término típico de interacción entre spines de dos bloques triangulares contiguos es

$$V_{ij} = -K(s_1^I s_3^J + s_2^I s_3^J) \Rightarrow$$

$$\langle V_{ij} \rangle = \langle -K(s_1^I s_3^J + s_2^I s_3^J) \rangle = -2K \langle s_1^I \rangle \langle s_3^J \rangle$$

pues están en dos celdas distintas.



Sea uno de los valores medios  $\langle s_3^J \rangle$

$$\begin{aligned} \langle s_3^J \rangle &= \frac{\sum_{\sigma_L} s_3^J \exp(K(s_1^I s_2^J + \dots))}{Z_0(K)} = \frac{1}{Z_0(K)} S_I (\exp(3K) + \exp(-K)) = \\ &= S_I \frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \end{aligned}$$

(Expresamos el valor medio en función de  $S_I$ )

$Z_0(K)$

Luego  $\langle V_{IJ} \rangle = -2K \left[ \frac{\exp(3K) + \exp(-K)}{\exp(3K) + 3 \exp(-K)} \right]^2 S_I S_J$

Sea ahora el termino que contiene  $B ( V_2)$

Este es directamente

$$B[\langle s_1 \rangle + \dots] = -3S_I B \left[ \frac{\exp(3K) + \exp(-K)}{\exp(3K) + 3 \exp(-K)} \right]$$

Finalmente (reuniendo los términos)

$$H(K_L, \{S_I\}) = \log \left[ \sum_{\{\sigma_L\}} \exp[-H_0] \right] + \langle V \rangle_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= M \log(Z_0(K)) + \\
&-2K \sum_{I \neq J} \left[ \frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]^2 S_I S_J \\
&-3B \sum_I \left[ \frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right] S_I
\end{aligned}$$

De donde tenemos

$$H(K_L, B_L, \{S_I\}) = -K_L \sum_{I \neq J} S_I S_J - B_L \sum_I S_I$$

con

$$\begin{aligned}
K_L &= 2K \left[ \frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]^2 \\
B_L &= 3B \left[ \frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]
\end{aligned}$$

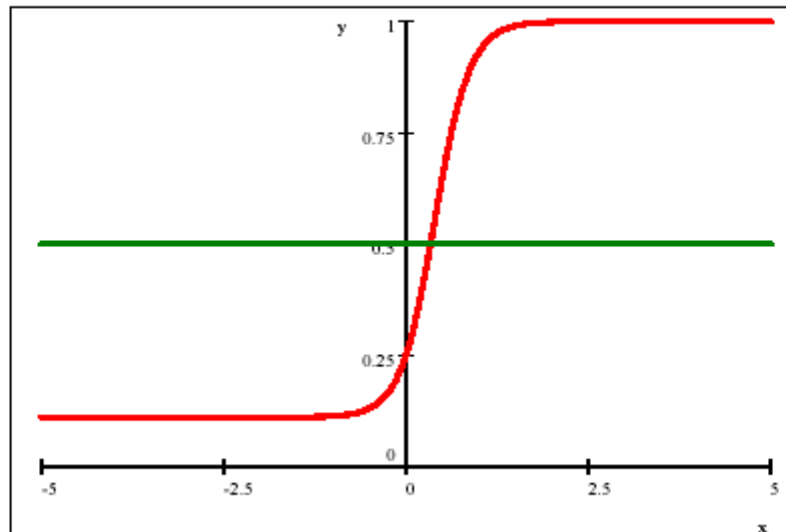
Para los puntos fijos

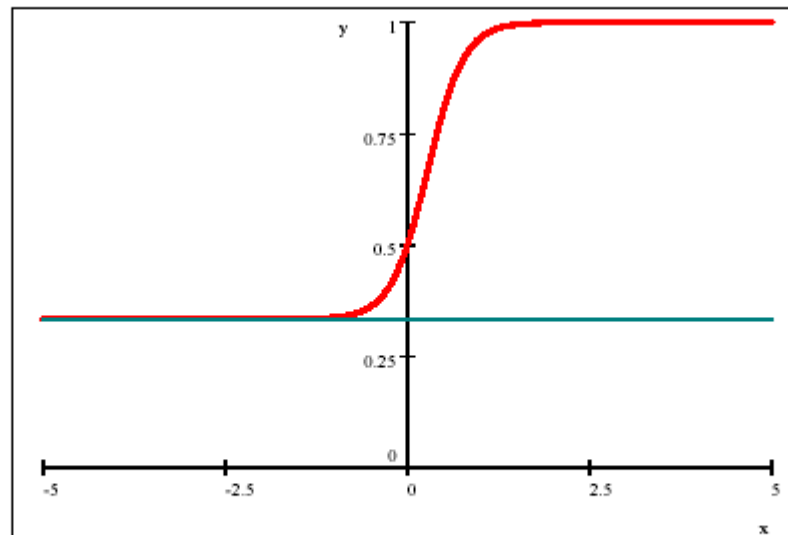
$(K_L=K \text{ y } B_L=B)$

$$\frac{1}{2} = \left[ \frac{\exp(3K)+\exp(-K)}{\exp(3K)+3 \exp(-K)} \right]^2$$
$$\frac{1}{3} = \left[ \frac{\exp(3K)+\exp(-K)}{\exp(3K)+3 \exp(-K)} \right]^2$$

$$\left[ \frac{\exp(3K)+\exp(-K)}{\exp(3K)+3 \exp(-K)} \right]^2$$

En realidad hay 8 soluciones una sola real  $K^* = 0.335614$ ,  
 $B^* = 0$





converge a  $-\infty$

En realidad hay 8 soluciones una sola real  $K^* = 0.335614$ ,  
 $B^* = 0$

y tambien  $K^* = 0$ ,  $B^* = 0$

El siguiente paso es linealizar las ecuaciones, resolver para los autovalores y autofunciones y se obtiene

Para  $K^* = 0, B^* = 0$

$$K = \delta K ; B = \delta B$$

$$\delta K = 2\delta K \left[ \frac{(\exp(3K) + \exp(-K))}{(\exp(3K) + 3 \exp(-K))} \right]_{K^*=0, B^*=0}^2 = 2\delta K \left[ \frac{1+1}{1+3} \right]^2 = \underline{0.5\delta K}$$

del mismo modo

$$\underline{\delta B = 1.5\delta B}$$



Para el otro punto fijo  $K^* = 0.335614$ ,  $B^* = 0$

---

Sea  $K = 0.3356 + \delta K$  ;  $B = \delta B$

Se obtiene

$$\delta K = 1.623\delta K, \delta B = 2.121\delta B$$

Luego

$$\lambda_K = 1.623 ; \lambda_B = 2.121$$

De aqui se determinan los exponentes de Widom (a partir del escaleo de la  $g$  )

$$p = \log(\lambda_K)/(2 \log(3)) = 0.441$$

$$q = \log(\lambda_B)/(2 \log(3)) = 0.684$$

De donde se derivan los exponentes criticos  
Sin embargo esta solucion de celda pequena...

	$\lambda_k$	$\lambda_B$	$K_c$
celda pequena	1.623	2.121	0.3356
siguientes vecinos	1.7590	2.8024	0.27416
exacto	1.73205	2.80092	0.27465

The critical exponents are

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - \frac{1}{p} = -0.27, & \beta &= \frac{1-q}{p} = 0.72, \\ \gamma &= \frac{2q-1}{p} = 0.83, & \text{and } \delta &= \frac{q}{1-q} = 2.2 \end{aligned} \quad (19)$$

The exact solution of this two-dimensional Ising model yields  $(\lambda_K)_{\text{exact}} = 1.73$  and  $(\lambda_B)_{\text{exact}} = 2.80$ . Thus, we are close for  $\lambda_K$  but our calculation of  $\lambda_B$  is not very good. It is possible to carry the calculation to higher orders in  $\langle V^n \rangle$ . In so doing, more elements of the vector,  $\mathbf{K}$ , are introduced and better agreement with the exact results is obtained.

Aquí

Cortamos

!

