

Física Teórica 3 – 2do cuatrimestre de 2020

Guía 8: Modelo de Ising

1. (Huang §14.6, Pathria §12.1) En una dimensión, el modelo de Ising puede ser resuelto en forma exacta. El método que se usa en este problema es el de la *matriz de transferencia*.

(a) Considere una cadena cerrada de  $N$  espines. Muestre que la función de partición canónica es

$$Q_N(b, K) = \sum_{\substack{s_1, \dots, s_N \\ = \pm 1}} \exp \left[ \sum_{i=1}^N (b s_i + K s_i s_{i+1}) \right],$$

donde  $b = \beta\mu B$ ,  $K = \beta J$ , y  $s_{N+1} = s_1$ .

(b) Muestre que  $Q_N = \text{Tr} (q^N)$ , donde  $q$  es la matriz de  $2 \times 2$  con elementos

$$q_{ss'} = \exp \left[ \frac{b}{2} (s + s') + K s s' \right] \quad (s, s' = \pm 1).$$

*Ayuda:* los exponentes en  $Q_N$  pueden ser reescritos de manera simétrica como

$$\sum_{i=1}^N (b s_i + K s_i s_{i+1}) = \sum_{i=1}^N \left( b \frac{s_i + s_{i+1}}{2} + K s_i s_{i+1} \right).$$

(c) Muestre que la función de partición puede escribirse en la forma  $Q_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$ , donde  $\lambda_{\pm} = e^K \left( \cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}} \right)$  son los autovalores de la matriz  $q$ .

(d) Muestre que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Q_N}{N} = \ln \lambda_+$ .

(e) Calcule la magnetización media  $M = M(T, B)$  y muestre que no hay magnetización espontánea cuando  $B \rightarrow 0^+$ . *Ayuda:* la magnetización media por espín es

$$\mu \bar{s} = \mu \frac{1}{N} \frac{\partial \ln Q_N}{\partial b} \Big|_K.$$

2. (a) Use el método de la matriz de transferencia para resolver el problema de la cadena lineal con extremos abiertos: muestre primero que la función de partición es  $Q'_N = \sum_{s, s'} e^{b(s+s')/2} [q^{N-1}]_{ss'}$  y luego que

$$Q'_N = \left[ \cosh b + \frac{\sinh^2 b + e^{-2K}}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}} \right] \lambda_+^{N-1} + \left[ \cosh b - \frac{\sinh^2 b + e^{-2K}}{\sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}}} \right] \lambda_-^{N-1}.$$

*Ayuda:* para calcular las potencias de  $q$  pueden usarse las mismas técnicas que en los problemas de Markov, con la simplificación adicional de que aquí la matriz es simétrica, de modo que sus autovectores por derecha e izquierda son los mismos.

(b) Muestre que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln Q'_N}{N} = \ln \lambda_+$ .

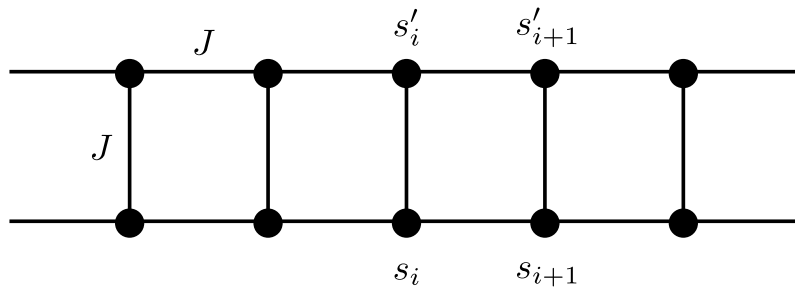
3. Para la cadena abierta sin campo, escriba la función de partición como una suma sobre todos los espines, sume explícitamente sobre el último espín y encuentre una relación de recurrencia para  $Q'_N$  en términos  $Q'_{N-1}$ . Resuelva la relación de recurrencia y verifique que coincide con el resultado del problema anterior.
4. Use el método de la matriz de transferencia para resolver el problema de una doble cadena Ising cerrada y sin campo externo,

$$H = -J \sum_{i=1}^N (s_i s_{i+1} + s'_i s'_{i+1}) - J \sum_{i=1}^N s_i s'_i.$$

Muestre que para  $N \gg 1$

$$\frac{1}{2N} \log Q_N \simeq \frac{1}{2} \log \left[ 2 \cosh K \left( \cosh 2K + \sqrt{1 + 4 \sinh^4 K} \right) \right],$$

donde  $K = \beta J$ . Ayuda: reescribir el término de interacción entre las cadenas de manera simétrica,  $\sum_{i=1}^N s_i s'_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (s_i s'_i + s_{i+1} s'_{i+1})$ . La matriz de transferencia será de  $4 \times 4$ .



5. La aproximación de campo medio más simple para el modelo de Ising con condiciones periódicas consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para un solo espín,  $s$ , reemplazando la interacción con sus  $\gamma$  primeros vecinos por un término efectivo de la forma  $E_1 = -J\gamma s \bar{s}$ , donde  $\bar{s}$  es el valor medio de cualquier espín. La interacción lineal con un campo magnético externo sigue siendo  $-B\mu s$ . Escriba la ecuación de autoconsistencia para el valor medio del espín y encuentre la temperatura crítica,  $T_c$ , por debajo de la cual hay magnetización espontánea. Para el caso  $\gamma = 4$ , compare esta solución con el valor exacto,  $kT_c = -2J/\log(\sqrt{2} - 1)$ .
6. En la aproximación de campo medio para un solo espín del problema anterior, halle los exponentes críticos de las siguientes magnitudes termodinámicas:
- La magnetización media a campo nulo, que se comporta como  $M(T, B = 0) \sim (T_c - T)^\beta$  para  $T \rightarrow T_c^-$ .
  - La magnetización media en la temperatura crítica, que se comporta como  $M(T_c, B) \sim B^{1/\delta}$  para  $B \rightarrow 0$ .
  - La susceptibilidad magnética  $\chi_T(T, B = 0)$ , la cual diverge como  $(T_c - T)^{-\gamma}$  para  $T \rightarrow T_c^-$ .
7. Una segunda aproximación de campo medio consiste en escribir un hamiltoniano efectivo para dos espines vecinos,  $s_1$  y  $s_2$ , conservando de manera exacta su interacción mutua, pero reemplazando los espines de los otros sitios vecinos por su valor medio  $\bar{s}$ .

(a) Hallar la ecuación de autoconsistencia para el valor de expectación  $\bar{s}$  y con ella una expresión para  $T_c$ . Encontrar (numéricamente si es necesario) el valor de  $T_c$  para la red cuadrada y comparar con el resultado exacto y con el obtenido en la aproximación de campo medio para un solo espín.

(b) Hallar  $U$  y  $C_V$  para  $T > T_c$ .

8. (Dalvit, prob. 5.22) Considere una red cuadrada bidimensional formada por dos tipos de sitios  $A$  y  $B$  con momentos magnéticos  $\mu_A$  y  $\mu_B$ , respectivamente. El hamiltoniano es del tipo Ising, pero con interacción a primeros y segundos vecinos. Las constantes de acoplamiento son:

$$\begin{aligned} J_1 &> 0 && \text{entre sitios vecinos de la red } A \\ J_1 &> 0 && \text{entre sitios vecinos de la red } B \\ J_2 &< 0 && \text{entre sitios vecinos } A \text{ y } B \end{aligned}$$

(a) Escriba el hamiltoniano en términos de  $s_i^A$  y  $s_i^B$ .

(b) En la aproximación de campo medio más simple, calcule el campo magnético efectivo que ven los espines de la red  $A$ . Ídem para la red  $B$ .

(c) Halle las ecuaciones para  $\langle s_i^A \rangle$  y  $\langle s_i^B \rangle$ .

(d) Muestre que la susceptibilidad magnética a campo nulo obedece la ley de Curie

$$\chi(T, B \rightarrow 0) \sim \frac{1}{T - T_c}.$$