FT 3 10/5 Extra

Saturday, May 8, 2021 12:53 PM

Un gas diluido de partículas de masa m está contenido en un recipiente cilíndrico de radio R. Las partículas están sometidas al potencial

$$\phi(r) = -\kappa \log\left(\frac{r}{R}\right)$$

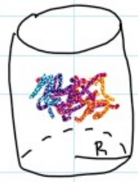
donde r es la distancia al eje del cilindro y κ es una constante positiva.

(a) A partir de la ecuación de Boltzmann, obtenga la función de distribución de equilibrio del gas sabiendo que su densidad en la superficie lateral del cilindro (es decir, a distancia R del eje) es n_R.

(b) Calcule la fuerza ejercida por el gas sobre la base del cilindro.

(c) Si hacemos un pequeño agujero de área a en un punto de la base a distancia r del eje, ¿cuántas partículas escapan por unidad de tiempo? Discuta qué sucede en el caso $r = 0$.

$$\phi(r) = -\kappa \log\left(\frac{r}{R}\right)$$



Leyes de conservación:

- $\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(n\vec{u}) = 0$
- $\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{\theta} = 0$

$$\begin{cases} \vec{\pi} = \int d^3p\, \vec{v} f \\ \boxed{\theta_{ij} = \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{M} f} \end{cases}$$

- $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \varepsilon = \int d^3p\, \frac{p^2}{2M} f \\ \vec{j}_\varepsilon = \int d^3p\, \frac{p^2}{2M}\frac{\vec{p}}{M} f \end{cases}$$

a) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{M}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}} - \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi(\vec{r})\right)\cdot\vec{\nabla}_{\vec{p}}\right) f(\vec{r},\vec{p},t) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col}$$

estacio.

$\to \boxed{f(\vec{r},\vec{p},\cancel{t}) = g(\vec{r}) f_{MB}(\vec{p})} \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

vale por linealidad de ec.

$\to \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col} = 0$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col} = \int d\vec{p}_2\, d\Omega\, |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|\, \sigma(\Omega) \underbrace{(f_1' f_2' - f_1 f_2)}_{\text{estacionario} \;=0} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col} = 0$$

$$\left(\frac{\vec{p}}{M}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}} - (\vec{\nabla}_r\phi(\vec{r}))\cdot\vec{\nabla}_{\vec{p}}\right) \underbrace{g(\vec{r}) f_{MB}(\vec{p})}_{} = 0$$

$$\underbrace{f_{MB}(\vec{p})\frac{\vec{p}}{M}}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}} g(\vec{r}) - g(\vec{r})(\vec{\nabla}_r\phi(\vec{r}))\cdot\underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{p}} f_{MB}(\vec{p})}_{-\frac{\beta}{M}\vec{p} f_{MB}(\vec{p})} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\vec{p}}{M} f_{MB}(\vec{p})}\underbrace{\left[\vec{\nabla}_{\vec{r}} g(\vec{r}) + \beta g(\vec{r})\left(\vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi(\vec{r})\right)\right]} = 0$$

$$\left[\vec{\nabla} + \beta\vec{\nabla}\phi(\vec{r})\right] g(\vec{r}) = 0$$

$$\therefore g(\vec{r}) = C e^{-\beta\phi(\vec{r})}$$

$$\therefore \; g(\vec{r}) = C e^{-\beta\phi(\vec{r})}$$

$$f(\vec{r},\vec{p},\cancel{t}) = C e^{-\beta\phi(r)} f_{MB}(\vec{p}) = \eta e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2M} + \phi(r)\right)}$$

despejar η con dato de densidad $\Rightarrow n(\vec{r} = R\hat{r}) = n_R$

$$\Rightarrow n(\vec{r}) = \int d^3p \, f(\vec{r},\vec{p},\cancel{t})$$

$$n(\vec{r}) = \eta e^{-\beta\phi(\vec{r})} \left(\frac{2\pi M}{\beta}\right)^{3/2}$$

$\phi(r=R) = 0$

$$n(R) = \eta \left(\frac{2\pi M}{\beta}\right)^{3/2} = n_R \longrightarrow \eta = n_R \left(\frac{\beta}{2\pi M}\right)^{3/2}$$

$$\boxed{f(\vec{r},\vec{p}) = n_R \left(\frac{\beta}{2\pi M}\right)^{3/2} e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2M} + \phi(\vec{r})\right)}}$$

b) $\vec{F} = \int_{\text{base cilindro}} \underbrace{P(\vec{r})}_{\text{presión en c/punto}} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\perp \text{ a sup}}$

$$\Theta_{ij} = \int d^3p \, \frac{p_i p_j}{M} f(\vec{r},\vec{p}) = \begin{cases} p_i p_j \cdot f(\vec{r},\vec{p}) = 0 & i \neq j \\ \neq 0 & i = j \end{cases}$$

$$\left[\Theta_{ij} = \delta_{ij} \frac{n_R}{\beta} e^{-\beta\phi(\vec{r})}\right]$$

$$\left[\Theta_{ij} = P \delta_{ij}\right] \rightarrow$$ Vale porque nos paramos en el sistema del gas

$$\boxed{P = n_R k_B T e^{-\beta \phi(\vec{r})}}$$

$$\vec{F} = \int_{\text{base cilindro}} P(\vec{r})\, d\vec{S} \rightsquigarrow \vec{F} = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} d\theta\, dr\, r\,(-\hat{z})\, P$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{2\pi \beta^2 n_R R^2}{\kappa + 2\beta}\,\hat{z}}$$

c) $\left.\begin{array}{l}\text{n° part}\\ \text{escap.}\\ \text{por } t.\end{array}\right\} = \int_{\text{agujero}} \vec{j}_n\, d\vec{S}$

$$\vec{j}_n = \int d^3p\, \frac{\vec{p}}{m} f(\vec{r},\vec{p})$$

$$\vec{j}_n = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{0} dp_z\, \frac{\vec{p}}{m}\, f(\vec{r},\vec{p})\right]$$

$$\vec{j}_n = \frac{n_R}{m}\left(\frac{\beta}{2\pi m}\right)^{3/2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta\kappa}\left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{0} dp_z\, [\cancel{p_x \hat{x}} + \cancel{p_y \hat{y}} + p_z \hat{z}]\cdot e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\right]$$

exacto

al integrar ... $\vec{j}_n = n_R\left(\frac{k_B T}{2\pi m}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{\kappa}{k_B T}}(-\hat{z})$

$$\Rightarrow \int_{\text{agujero}} \vec{J}_n \underbrace{\vec{ds}}_{-\hat{z}\,ds} = J_n \underbrace{\int_{\text{agujero}} ds} = J_n a = \text{N° part q' se escapan por unidad de tiempo}$$