Parte conjunta de los ejercicios 8 y 9

8. Pruebe que la entropía por fotón en la radiación de cuerpo negro es independiente de la temperatura, y en d dimensiones espaciales está dada por

$$s = (d+1)\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d}}.$$

$\omega = ck$

Pruebe que la respuesta habría sido $s = d+1$ si los fotones obedecieran la estadística de Boltzmann.

9. Considere un sólido de ~~x~~ d dimensiones con excitaciones que tienen una relación de dispersión $\omega = \alpha k^{\cancel{x}}$ $\equiv r$ donde ω es la frecuencia angular, k el módulo del vector de onda y α una constante. Cada excitación contribuye a la energía con $\epsilon = \hbar\omega$.

   (a) Calcule la densidad de estados $g(\omega)$ en la aproximación de Debye, es decir considerando al sólido como continuo. Escriba la expresión para la energía del sistema.

   (b) Demuestre que para temperaturas muy bajas la dependencia del calor específico con la temperatura es $C_V \sim T^{n/s}$.

   (c) ¿Cuál es la dependencia de C_V con la temperatura en el límite de temperaturas altas? En el mismo límite, ¿cómo depende de $\hbar$? No hace falta hacer cuentas.

- Consideremos un sistema de bosones en d dimensiones con $\mu = 0$ y relación de dispersión $\omega(k) = \alpha k^r$

$$\ln(Z_{GC}) = -\sum_{\underset{\leftarrow \text{ estado de 1 partícula}}{i}} \ln\left(1 - z\, e^{-\beta \varepsilon_i}\right)$$

Antes de evaluar $z = 1$, calculo $\langle N \rangle$:

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial z} = -\sum_i \frac{-z e^{-\beta\varepsilon_i}}{1 - z e^{-\beta\varepsilon_i}} = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}$$

$$\langle N \rangle \overset{\mu=0}{=} \sum_i \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i} - 1}$$

Estados monopartículas están caracterizados por: $\bar{h}$, σ: índice de polarización. con g posibilidades

$\varepsilon(\bar{h})$ no depende de σ

NOTACIÓN

$$\langle N \rangle = \sum_\sigma \int \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\bar{h})} - 1} \frac{d\bar{r}\, d\bar{h}}{h^d} = \underbrace{g}_{\text{Suma en } \sigma} \frac{V_d}{h^d} \int \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\bar{h})} - 1} \underbrace{d\bar{h}}_{h^{d-1} d\Omega_d\, dh}$$

$$\langle N \rangle \overset{\bar{h} = \hbar \bar{k}}{=} g \frac{V_d\, \hbar^d}{h^d} \int \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(\bar{k})} - 1} d\bar{k} \underset{\varepsilon(\bar{k}) = \varepsilon(k)}{=} \frac{g V_d\, \Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^{k_{MÁX}} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon(k)} - 1} k^{d-1}\, dk$$

$\frac{\hbar^d}{h^d} = 1/(2\pi)^d$

Ω_d: ÁNGULO SÓLIDO EN d dimensiones:

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

Pasamos a ω: $\omega = \alpha k^r$

$d\omega = r\alpha\, k^{r-1}$

$$\langle N \rangle = \frac{g V_d\, \Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^{\omega_{MÁX}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \frac{k^{d-1}}{k^{r-1}(r\alpha)} d\omega$$

Parte conjunta de los ejercicios 8 y 9

$$\langle N\rangle = \frac{g V_d \Omega_d}{(2\pi)^d}\int_0^{\omega_{MÁX}} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\, \underbrace{\frac{k^{d-1}}{k^{r-1}(r\alpha)}}_{\frac{1}{r\alpha}k^{d-r} = \frac{1}{r\alpha}\left(k^{r}\right)^{\frac{d-r}{r}}}\, d\omega$$

$$= \frac{\left(\alpha k^{r}\right)^{\frac{d-r}{r}}}{r\alpha\, \alpha^{\frac{d-r}{r}}} \qquad \left(\alpha k^{r}\right)^{\frac{d-r}{r}} \to \omega^{\frac{d}{r}-1}$$

$$\langle N\rangle = \underbrace{\frac{g V_d \Omega_d}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{\alpha^{d/r}}}_{g(\omega)}\int_0^{\omega'_{MÁX}} \frac{\omega^{\frac{d}{r}-1}}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\, d\omega = \int_0^{\omega_{MÁX}} g(\omega)\,\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\, d\omega \qquad (1)$$

Es inmediato escribir el valor medio de la energía:

$$U = \int_0^{\omega_{MÁX}} g(\omega)\, \overbrace{\hbar\omega}^{\varepsilon(\omega)}\, \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\, d\omega \qquad (2)$$

- Caso particular: $\omega_{MÁX} \to \infty$ $\longrightarrow$ $g(\omega) = (cte)\,\omega^{\frac{d}{r}-1}$

$$\ln(Z_{GC}) = -\int_0^{\cancel{\omega_{MAX}}\ \infty} g(\omega)\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) d\omega$$

$$\ln(Z_{GC}) = -\int_0^{\infty} (cte)\,\omega^{\frac{d}{r}-1}\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) d\omega = \quad \to \text{INTEGRAMOS POR PARTES}$$

$$\ln(Z_{GC}) = \left[\underbrace{-\frac{r}{d}\,\omega^{\frac{d}{r}}\,\ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{r}{d}\int_0^{\infty} \omega^{d/r}\,\frac{(\beta\hbar)\,e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{\beta\hbar\omega}}\, d\omega\right](cte)$$

$$\ln(Z_{GC}) = \frac{r}{d}\beta\int_0^{\infty} \underbrace{(cte)\,\omega^{d/r-1}}_{g(\omega)}\,\underbrace{(\hbar\omega)}_{\varepsilon(\omega)}\,\underbrace{\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}}_{n_{BE}(\omega)}\, d\omega = \frac{r}{d}\beta\, U$$

En este caso particular: (3)

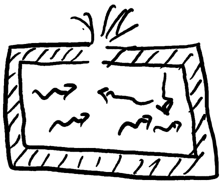
$$\Xi = \underbrace{-k_B T}_{-\frac{1}{\beta}}\ln(Z_{GC}) = U - TS - \underbrace{\cancel{\mu\langle N\rangle}}_{=0 \text{ pues } \mu=0} \Rightarrow S = \frac{U-\Xi}{T} = \boxed{\left(\frac{r}{d}+1\right)\frac{U}{T} = S}$$

Ejercicio 8

8. Pruebe que la entropía por fotón en la radiación de cuerpo negro es independiente de la temperatura, y en d dimensiones espaciales está dada por

$$\frac{S}{\langle N\rangle} = s = (d+1)\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d-1}}{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-d}} \cdot k_B$$

Pruebe que la respuesta habría sido $s = \cancel{(d+1)}$ $k_B(d+1)$ si los fotones obedecieran la estadística de Boltzmann.



En el caso de los fotones:

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_{MÁX} \to \infty \\ \omega = ck \Rightarrow \alpha = c;\ r = 1 \\ g = 2 \text{ (las dos polarizaciones posibles de la luz)} \end{array}\right.$$

$$\langle N\rangle = \upsilon = \int_0^{\omega_{MÁX}} g(\omega)\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega \quad (1) \qquad \text{con } g(\omega) = \underbrace{\frac{\overset{2}{\tilde{g}}\, V_d\, \Omega_d}{(2\pi)^d c^d}}_{\equiv a_d V_d}\,\omega^{d-1}$$

Es inmediato escribir el valor medio de la energía:

$$U = \int_0^{\omega_{MÁX}} g(\omega)\overbrace{\hbar\omega}^{\varepsilon(\omega)}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega \quad (2)$$

$$\langle N\rangle = a_d V_d \int_0^{\infty}\frac{\omega^{d-1}}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega \overset{x=\beta\hbar\omega}{=} a_d V_d\int_0^{\infty}\frac{1}{\beta\hbar}\frac{1}{(\beta\hbar)^{d-1}}\frac{x^{d-1}}{e^x-1}\,dx$$

$$\langle N\rangle = \frac{a_d V_d}{(\beta\hbar)^d}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{x^{d-1}}{e^x-1}\,dx}_{\Gamma(d)\, g_d(1)} = \boxed{\frac{a_d V_d}{(\beta\hbar)^d}\Gamma(d)\, g_d(1) = \langle N\rangle}$$

$$U = \hbar a_d V_d\int_0^{\infty}\frac{\omega^d}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega = \boxed{\frac{\hbar a_d V_d}{(\beta\hbar)^{d+1}}\Gamma(d+1)\, g_{d+1}(1) = U}$$

Usando (3):

$$\frac{S}{N} = s = \frac{\left(\overbrace{\frac{A}{d}+1}^{=\frac{d+1}{d}}\right)\frac{U}{T}}{N} = \cancel{\hbar}\,\frac{d+1}{\cancel{d}}\,\frac{1}{\cancel{T}}\,\frac{k_B\cancel{T}}{\cancel{\hbar}}\,\frac{\overset{=\cancel{d}\,\cancel{\Gamma(d)}}{\Gamma(d+1)}}{\cancel{\Gamma(d)}}\,\frac{g_{d+1}(1)}{g_d(1)}$$

Ejercicio 8

Usando ③:

$$\frac{S}{N} = r = \frac{\left(\overbrace{\frac{A}{d}+1}^{=\frac{d+1}{d}}\right)\frac{U}{T}}{N} = \cancel{\hbar}\,\frac{d+1}{\cancel{d}}\,\frac{1}{\cancel{T}}\,\frac{K_B \cancel{T}}{\cancel{\hbar}}\,\frac{\overbrace{\Gamma(d+1)}^{=d\cancel{\Gamma(d)}}}{\cancel{\Gamma(d)}}\,\frac{g_{d+1}(1)}{g_d(1)}$$

$$r = K_B(d+1)\frac{g_{d+1}(1)}{g_d(1)} = \boxed{K_B(d+1)\frac{\sum_{m\geq 1} 1/m^{d+1}}{\sum_{m\geq 1} 1/m^{d}} = r}$$

Usando

$$g_\nu(1) = \sum_{m\geq 1} 1/m^\nu$$

- Si los fotones obedecieran la estadística clásica (M-B):

$$Z_{GC} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} z^N Z_1^N \quad \text{donde} \quad Z_1 = g\int e^{-\beta \overbrace{\varepsilon(\hbar)}^{\hbar c k = c\hbar}} \frac{d\bar{r}\, d\bar{\hbar}}{h^d}$$

$$Z_1 = gV_d\Omega_d \int_0^\infty e^{-\beta c\hbar}\, \hbar^{d-1}\, d\hbar$$

$$Z_1 \overset{x=\beta c\hbar}{=} \frac{gV_d\Omega_d}{(\beta c)^d} \underbrace{\int_0^\infty x^{d-1} e^{-x}\, d\hbar}_{\Gamma(d)}$$

$$\rightarrow Z_{GC} = e^{zZ_1}$$

$$\rightarrow \ln(Z_{GC}) = zZ_1$$

$$\rightarrow \langle N\rangle = z\frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial z} = zZ_1 \qquad Z_1 \propto (K_BT)^d$$

$$\rightarrow S = -\left(\frac{\partial \Xi}{\partial T}\right)_{V,z} = -\frac{\partial}{\partial T}\Big[\overbrace{z\,(K_BT)^{d+1}(cte.)}^{-K_BT\ln(Z_{GC})}\Big] = -(d+1)Z_1 z$$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{\langle N\rangle} = \cancel{K_B}(d+1)\frac{\cancel{Z_1 z}}{\cancel{Z_1 z}} = \boxed{(d+1)K_B = r}$$

$\omega = \alpha k^r$

Ejercicio 9: "Modelo de Debye"

9. Considere un sólido de ~~n~~ d dimensiones con excitaciones que tienen una relación de dispersión $\omega = \alpha k^s$, donde ω es la frecuencia angular, k el módulo del vector de onda y α una constante. Cada excitación contribuye a la energía con $\epsilon = \hbar\omega$.

   (a) Calcule la densidad de estados $g(\omega)$ en la "aproximación de Debye", es decir considerando al sólido como continuo. Escriba la expresión para la energía del sistema.

   (b) Demuestre que para temperaturas muy bajas la dependencia del calor específico con la temperatura es $C_V \sim T^{d/r}$.

   (c) ¿Cuál es la dependencia de C_V con la temperatura en el límite de temperaturas altas? En el mismo límite, ¿cómo depende de $\hbar$? No hace falta hacer cuentas.

EQUIPARTICIÓN (verlo)

En el modelo de Debye verdadero: $\omega = C_s k$. El P9 es GENERALIZADO

C_s → velocidad efectiva del sonido.

Por lo visto en la p. 2, tenemos:

$$\langle N\rangle = \underbrace{\frac{g V_d \Omega_d}{(2\pi)^d}\frac{1}{r}\frac{1}{\alpha^{d/r}}\int_0^{\omega_{MÁX}} \omega^{\frac{d}{r}-1}}_{g(\omega)} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega = \int_0^{\omega_{MÁX}} g(\omega)\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega \quad (1)$$

no nos va a interesar

$\langle N\rangle$: nº medio de fonones

A nosotros nos interesa el nº de g. l.

(dato de los problemas) (✳)

Es inmediato escribir el valor medio de la energía:

$$U = \int_0^{\omega_{MÁX}} g(\omega)\overbrace{\hbar\omega}^{\varepsilon(\omega)}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega \quad (2)$$

(a) La densidad de estados o de modos es inmediata:

$$\boxed{g(\omega) = \frac{g V_d \Omega_d}{(2\pi)^d}\frac{1}{r}\frac{1}{\alpha^{d/r}}\,\omega^{\frac{d}{r}-1}}$$

g = dimensiones espaciales, degenerados, por el "falso" modelo de Debye

Nº de g. l. del sistema = Nº de modos normales

$$(✳)\quad d\cdot N = \int_0^{\omega_{MÁX}} g(\omega)\,d\omega$$

$\omega_{MÁX} = \omega_D$: Frecuencia de (corte de) Debye

Ejercicio 9: "Modelo de Debye"

$$d\cdot N = \int_0^{\omega_D} g(\omega)\,d\omega = \int_0^{\omega_D} \frac{d\,V_d\,\Omega_d}{(2\pi)^d\,\alpha^{d/r}\,r}\,\omega^{\frac{d}{r}-1}\,d\omega = d\cdot N$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega_D^{d/r} = \frac{d}{r}\,\frac{(2\pi)^d\,\alpha^{d/r}\,r}{\Omega_d}\,\frac{N}{V_d}}$$

Ej $\left.\begin{matrix} r = 1 \\ \alpha = c_s \\ d = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\omega_D = \left[6\pi^2 \frac{N}{V}\right]^{\frac{1}{3}} c_s}$ ($\Omega = 4\pi$)

Esto nos permite encontrar la frecuencia de corte del "modelo de Debye"

- El U que tenemos en ② es la contribución a la energía de los estados excitados del sistema ($\omega \neq 0$)

$$\langle \text{Energía del sistema} \rangle = \sum_{\bar{k},\sigma} \hbar\omega_{\bar{k},\sigma}\Big(\underbrace{\langle n_{\bar{k},\sigma}\rangle}_{\text{dist. de BE}} + \frac{1}{2}\Big) = U + U_0$$

no depende de T: energía de punto cero

ⓑ Para calcular la capacidad calorífica:

$$C_V = \left[\frac{\partial\langle \text{Energía del sistema}\rangle}{\partial T}\right]_V \underset{\uparrow}{=} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{d\beta}{dT}\left(\frac{\partial U}{\partial \beta}\right)_V = -k_B\beta^2\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\right)_V$$

U_0 no depende de T

$$U = \int_0^{\omega_D} \underbrace{g(\omega)}_{b_d V_d \omega^{\frac{d}{r}}}\,\overbrace{\hbar\omega}^{\varepsilon(\omega)}\,\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\,d\omega \Rightarrow C_V = \cancel{-}k_B\,\beta^2 b_d V_d \int_0^{\omega_D} \omega^{d/r}\,\frac{(\cancel{-}\hbar\omega)e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2}\,d\omega$$

Nos piden el cálculo a muy baja T: $\hbar\omega_D = k_B T_D \longrightarrow T \ll T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} \to \infty$

- Adimensionalizamos definiendo $x = \beta\hbar\omega$: $x_D = \beta\hbar\omega_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B T} = \frac{T_D}{T} \to \infty$

$$C_V = \frac{k_B\,\beta^2\,b_d V_d \hbar}{(\beta h)^{\frac{d}{r}+2}} \underbrace{\int_0^{x_D\to\infty} \frac{x^{d/r+1}\,e^x}{(e^x-1)^2}\,dx}_{\text{número}} \sim (k_B T)^{\frac{d}{r}+2-2} = (k_B T)^{d/r}$$

Por lo tanto, si $T \ll T_D$ (baja T), $\boxed{C_V \sim T^{d/r}}$