10. **Enanas blancas y límite de Chandrasekhar.** Las enanas blancas son estrellas compuestas principalmente de helio (en su isótopo más estable, con dos neutrones) a una temperatura del orden de 10^7 K y a una densidad de unos 10^{10} kg/m^3.

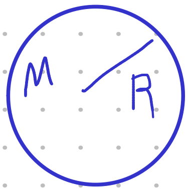
(a) Muestre que los átomos de helio deben encontrarse totalmente ionizados, y que el gas de electrones resultante puede considerarse como un gas relativista a temperatura nula. Datos: $k \simeq 1.4 \times 10^{-23}$ J/K, $h \simeq 6.6 \times 10^{-34}$ Js, masa del protón $m_p \simeq 1.7 \times 10^{-27}$ kg, masa del electrón $m_e \simeq 9.1 \times 10^{-31}$ kg, energía de ionización completa del helio $E_{\text{ion}} \sim 100$ eV $\sim 10^{-17}$ J.

(b) Asumiendo que la estrella es homogénea, se obtiene que su energía potencial gravitatoria es $E_p = -3GM^2/(5R)$, donde M y R denotan respectivamente la masa y el radio de la estrella. Calcule su energía cinética E_c, despreciando la contribución de los núcleos y aproximando la relación de dispersión de los electrones a primer orden en m_e^2, $\epsilon = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4} \simeq pc + m_e^2c^3/2p$. Exprese E_c en función de M y R.

(c) En equilibrio, el radio de la estrella toma el valor que minimiza su energía. Muestre que existe una masa límite M_C tal que, para $M > M_C$, no hay ningún radio de equilibrio. Esa masa límite se conoce como el *límite de Chandrasekhar*. Calcule M_C y exprésela en unidades de la masa del sol $M_\odot \simeq 2.0 \times 10^{30}$ kg, sabiendo el valor de la masa de Planck, $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \simeq 2.2 \times 10^{-8}$ kg. ¿Qué le ocurre a la estrella cuando $M > M_C$?

(d) Muestre que no existiría una masa límite si el gas de electrones fuera no relativista.

a)



$He \to 2p + 2N + 2e$

$T \sim 10^7$ K

$\rho \sim 10^{10}$ kg/m^3

$v << \lambda^3$ $\qquad \lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$

$\dfrac{\lambda^3}{v} >> 1$

$m_{He} = 2m_e + 2m_p + 2m_N \simeq 4m_p \simeq 4 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}\ kg \simeq 6,8 \cdot 10^{-27} kg$

$v = \dfrac{V\, m_{He}}{\underbrace{N\, m_{He}}_{M}} = \dfrac{m_{He}}{\rho} \simeq \dfrac{6,8 \cdot 10^{-27}\ kg}{10^{10}\ kg/m^3} = 6,8 \cdot 10^{-37} m^3$

$\lambda = \dfrac{6,6 \cdot 10^{-34}\ J.S}{\sqrt{2\pi \cdot 6,8 \cdot 10^{-27} \cdot 1,4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{J}{K} \cdot 10^7 K}} = 2,7 \cdot 10^{-13}\ m$

$\dfrac{\lambda^3}{v} = 3 \cdot 10^{-2} < 1$

$K_B \cdot T \simeq 1,4\ 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 10^7 K = 1,4 \cdot 10^{-16} J \sim 10^3 eV$

↳ $10^7 K$

$1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} eV$

y como la energía de ionización es 10^2 eV => está ionizado

$$\frac{\lambda^3}{v} \simeq 1{,}4 \cdot 10^{8} >> 1 \Rightarrow \text{uso F-D}$$

↳ Electrones

$$m_e c^2 \sim c \underbrace{p}_{\text{Quiero calcular } p}$$

$$\ln(Z_{GC}) = g_s \frac{V 4\pi}{h^3} \int_0^\infty \ln\left(1 + z\, e^{-\beta \varepsilon(p)}\right) . p^2 \, dp$$

$$\langle N \rangle = z \frac{\partial \ln(Z_{GC})}{\partial z} = g_s \frac{V 4\pi}{h^3} \int_0^\infty \underbrace{\frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon(p)} + 1}} p^2 \, dp$$

$$\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} \underset{\substack{T \to 0 \\ \beta \to \infty}}{=} \begin{cases} 1 & \varepsilon < \mu \equiv \varepsilon_f \\ 0 & \varepsilon > \mu \equiv \varepsilon_f \end{cases}$$

$$\langle N \rangle \equiv N = g_s \frac{V 4\pi}{h^3} \int_0^\infty p^2 \, \Theta(p_f - p) \, dp =$$

$$N = \underbrace{g_s}_{2S+1 = 2,\ S = \frac{1}{2}} \frac{V 4\pi}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 \, dp \doteq \underbrace{\frac{(2\pi)^3}{h^3 \pi^2}}_{\frac{1}{\hbar^3}} V \frac{p_f^3}{3}$$

$$\boxed{p_f = (3 n \pi^2)^{\frac{1}{3}} \hbar}$$

$$n = \frac{N}{V}$$

$$m_e c^2 \sim p_f c$$

$$M \simeq N(m_e + m_p + m_N) \simeq 2 N m_p \to N = \frac{M}{2 m_p}$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$n = \frac{N}{V} = \frac{M / 2m_p}{M/\rho} = \frac{\rho}{2m_p} \simeq 3 \cdot 10^{36}\ m^{-3}$$

$$p_f \simeq 4{,}7 \cdot 10^{-22}\ \frac{J \cdot s}{m}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m_e c^2 \simeq 8 \cdot 10^{-14}\ J \\ p_f c \simeq 1 \cdot 10^{-13}\ J \end{array}}$$

$$m_e = 9 \cdot 10^{-31}\ kg$$

$$\frac{m_e c^2}{p_f c} \simeq 8 \cdot 10^{-1} = 0{,}8 \Rightarrow m_e c^2 \sim p_f c$$

$$\mathcal{E}_f = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_f c)^2} \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-13}\ J$$

$$T_f = \frac{\mathcal{E}_f}{k} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ J}{1{,}4 \cdot 10^{-23}\ J/K} \sim 10^{10}\ K$$

$$T_f \sim 10^{10}\ K$$

$$T \sim 10^7\ K$$

$$\mu = \mathcal{E}_f \left(1 - \gamma \underbrace{\left(\frac{T}{T_f}\right)^2}_{\simeq 0} + O(T^3)\right)$$

$$\mu = \mathcal{E}_f$$

b) $$E_c = g_s \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^{\infty} p^2 \frac{\mathcal{E}(p)}{z^{-1} e^{\beta \mathcal{E}(p)} + 1}\, dp$$

$$E_c = 8\pi \frac{V}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 \mathcal{E}(p)\, dp$$

$$\hookrightarrow \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} \simeq pc + \frac{m_e^2 c^3}{2p}$$

$$E_c = 8\pi \frac{V}{h^3}\int_0^{p_F}\left(p^3 c + \frac{m_e^2 c^3 p}{2}\right)dp$$

$$E_c = 8\pi\frac{V}{h^3}\left(c\,\frac{p_F^4}{4} + \frac{m_e^2 c^3 p_F^2}{4}\right)$$

$$\boxed{E_c = \frac{V}{\hbar^3\pi^2}\,\frac{c}{4}\left(p_F^4 + m_e^2 c^2 p_F^2\right)}$$

$$p_F = \left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac13}\hbar \qquad V = \frac43\pi R^3 \qquad \boxed{N \simeq \frac{M}{2m_p}}$$

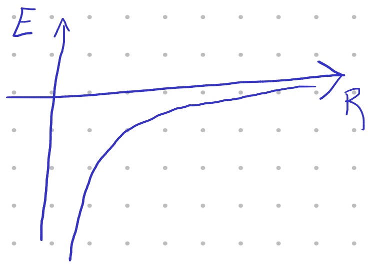
$$\frac{N}{V} = \frac{3M}{8\pi R^3 m_p}$$

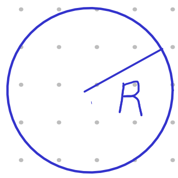
$$\boxed{E_c = \left(\frac98\right)^{\frac43}\frac{c\hbar\pi^{\frac13}}{3R}\left(\frac{M}{m_p}\right)^{\frac43} + \left(\frac98\right)^{\frac23}\frac{m_e^2c^2R}{3\hbar\pi^{\frac13}}\left(\frac{M}{m_p}\right)^{\frac23}}$$

c)

$$E = E_c + E_G = \underbrace{\left(\frac98\right)^{\frac43}\frac{c\hbar\pi^{\frac13}}{3R}\left(\frac{M}{m_p}\right)^{\frac43}} + \left(\frac98\right)^{\frac23}\frac{m_e^2c^2R}{3\hbar\pi^{\frac13}}\left(\frac{M}{m_p}\right)^{\frac23} \underbrace{- \frac35 G\frac{M^2}{R}}$$

$$E \sim \frac{-1}{R}$$





Il minimo in R finito

$$\left(\frac98\right)^{\frac43}\frac{c\hbar\pi^{\frac13}}{3R}\left(\frac{M_c}{m_p}\right)^{\frac43} = \frac35 G\frac{M_c^2}{R}$$

$$M_c = \frac38\left(\frac54\right)^{\frac32}\pi^{\frac12}\,\frac{\left(\overset{M_{Pl}^2}{\frac{c\hbar}{G}}\right)^{\frac32}}{m_p^2}$$

$$\boxed{M_c = \frac38\left(\frac54\right)^{\frac32}\pi^{\frac12}\,\frac{M_{Pl}^3}{m_p^2}}$$

$m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg

$M_{Pl} \simeq 2{,}2\ 10^{-8}$ kg

$M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg

$\boxed{M_c = 1{,}5\ M_S}$

$\boxed{M_c = 1{,}4\ M_S}$

Límite de Chandrasekhar

d) $\mathcal{E}(p) = \dfrac{p^2}{2m_e}$

$$E_c = 8\pi \frac{V}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m_e} p^2\, dp = \frac{4}{5} \pi \frac{V}{h^3} p_F^5$$

$$p_F \sim n^{\frac{1}{3}} \sim \frac{N^{\frac{1}{3}}}{V^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{N^{\frac{1}{3}}}{R}$$

$$E \sim \frac{M^{5/3}}{R^2}$$

$$E = \alpha \frac{M^{5/3}}{R^2} - \beta \frac{M^2}{R} > 0$$

12. (Dalvit et al, Problema 4.20b – Expansión libre de un gas de FD.) Un gas de N partículas de espín $1/2$ ocupa un volumen V y está a temperatura 0. El sistema está aislado térmicamente. Mediante un tabique removible el volumen aumenta de V a $V + \Delta V$, con $\Delta V \ll V$. El gas se expande libremente hasta ocupar todo el volumen y finalmente llega a un nuevo equilibrio a temperatura T. Encuentre T asumiendo válida la aproximación de muy baja temperatura.

$$\Delta E = 0$$

$$E = \frac{3}{5} N \epsilon_f \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_f} \right)^2 \right]$$

$$E_i = \frac{3}{5} N \epsilon_f(V)$$

$$E_f = \frac{3}{5} N \epsilon_f(V + \Delta V) \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_f(V+\Delta V)} \right)^2 \right]$$

$$\frac{\epsilon_f(V)}{\epsilon_f(V+\Delta V)} = 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_f(V+\Delta V)} \right)^2$$

$$T = T_f(V+\Delta V) \cdot \sqrt{\frac{12}{5\pi^2} \left(\frac{\epsilon_f(V)}{\epsilon_f(V+\Delta V)} - 1 \right)}$$

$$\Delta V \ll V$$

$$\epsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 N}{g_s V} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \epsilon_f \sim V^{-\frac{2}{3}}$$

$$\epsilon_f'(V) = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon_f(V)}{V}$$

$$\epsilon_f(V+\Delta V) \simeq \epsilon_f(V) + \epsilon_f'(V) \Delta V$$

$$\simeq \epsilon_f(V) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\Delta V}{V} \right)$$

$$T = T_f(V)\sqrt{\frac{12}{5\pi^2}\left(\frac{\cancel{\varepsilon_f(V)}}{\cancel{\varepsilon_f(V)}\left(1-\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}\right)}-1\right)}$$

$$\boxed{T = T_f(V)\sqrt{\frac{\Delta V}{V}\frac{8}{5\pi^2}} \neq 0}$$

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}}$$

$<< 1$

$$T_f = \frac{\varepsilon_f(V)}{k}$$

$$T_f(V+\Delta V) = T_f(V) + T_f'(V)\,\Delta V$$