

Teoría de Landau y grupo de renormalización

Guillem Pérez Nadal

Prefacio

Uno de los aspectos más sorprendentes de las transiciones de fase de segundo orden es lo que se conoce como *universalidad*: una gran variedad de sistemas tienen los mismos exponentes críticos. En estas notas presentamos dos enfoques para entender este fenómeno: la teoría de Landau y el grupo de renormalización. Para más información, se recomienda consultar los capítulos 11 y 13 del Pathria y el libro de J. M. Yeomans *Statistical mechanics of phase transitions* (Oxford University Press, 1992).

1 Universalidad

Consideremos una red de N spines que sólo pueden apuntar hacia arriba o hacia abajo, como en el modelo de Ising, pero con un hamiltoniano cualquiera,

$$H(s_1, \dots, s_N) = H_0(s_1, \dots, s_N) - h \sum_{i=1}^N s_i, \quad (1)$$

donde h es el campo magnético y H_0 es el hamiltoniano en ausencia de campo magnético. Supongamos que, a una cierta temperatura crítica T_c (y para $h = 0$), el sistema experimenta una transición de fase de segundo orden. Los *exponentes críticos* α , β , γ y δ se definen en términos del comportamiento del calor específico, la magnetización y la susceptibilidad cerca del punto crítico por las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_V &\sim |T - T_c|^{-\alpha} & (h = 0) \\ m &\sim (T_c - T)^\beta & (h = 0, T < T_c) \\ \chi &\sim |T - T_c|^{-\gamma} & (h = 0) \\ m &\sim h^{1/\delta} & (T = T_c). \end{aligned} \quad (2)$$

Por otra parte, la función de correlación $g(r) = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle$, donde $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ es la distancia entre los sitios i y j , se comporta para r grande en la forma $g(r) \sim e^{-r/\xi}$, donde ξ es una función de la temperatura y el campo magnético llamada *longitud de correlación*. El comportamiento de la longitud de correlación cerca del punto crítico también tiene asociado un exponente crítico,

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \quad (h = 0). \quad (3)$$

A partir de resultados experimentales, cálculos exactos y simulaciones numéricas se observa que los exponentes críticos sólo dependen de la dimensión de la red, y no de los detalles del hamiltoniano (si las interacciones son sólo entre primeros vecinos como en Ising, o incluyen también segundos vecinos, etc). Este fenómeno recibe el nombre de *universalidad*¹. El objetivo de estas notas es entender el porqué de la universalidad, y lo haremos estudiando dos métodos generales para calcular los exponentes críticos: la teoría de Landau y el grupo de renormalización.

2 Teoría de Landau

Dado un estado s_1, \dots, s_N cualquiera, sea \bar{s} el spin promedio,

$$\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i. \quad (4)$$

La magnetización será entonces el valor medio de esta cantidad, que en términos de la función de partición canónica se puede escribir como

$$m = \langle \bar{s} \rangle = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial}{\partial h} \ln Z. \quad (5)$$

Definimos la *energía libre de Landau* $f(T, h, \bar{s})$ por la ecuación

$$e^{-\beta N f(T, h, \bar{s})} = \sum_{s_i | \bar{s}} e^{-\beta H(s_1, \dots, s_N)}, \quad (6)$$

donde la notación $s_i | \bar{s}$ indica que la suma es sobre todos los estados s_1, \dots, s_N con spin promedio \bar{s} . Reemplazando el hamiltoniano (1) en esta ecuación vemos que la dependencia de f en el campo magnético es sencilla,

$$f(T, h, \bar{s}) = f_0(T, \bar{s}) - h\bar{s}, \quad (7)$$

donde f_0 denota la energía libre de Landau en ausencia de campo magnético. La función de partición se puede expresar en términos de f ,

$$Z = \sum_{s_1, \dots, s_N} e^{-\beta H(s_1, \dots, s_N)} = \sum_{\bar{s}} \sum_{s_i | \bar{s}} e^{-\beta H(s_1, \dots, s_N)} = \sum_{\bar{s}} e^{-\beta N f(T, h, \bar{s})}. \quad (8)$$

Notemos que \bar{s} puede tomar $N + 1$ valores distintos, porque va de -1 a 1 a saltitos de $2/N$. Así pues, la suma sobre \bar{s} tiene $\mathcal{O}(N)$ términos, y por lo tanto podemos aproximarla por su término más grande²,

$$Z \simeq e^{-\beta N f(T, h, \bar{s}_m)}, \quad (9)$$

¹De hecho, el alcance de la universalidad es más general. Los exponentes críticos se pueden definir para un sistema cualquiera, no se restringen a redes de spines, y, por ejemplo, se observa que los del punto crítico del agua coinciden con los de Ising en 3 dimensiones.

²Recuerden el argumento: si la suma tiene N términos y t_m es el término más grande tenemos $t_m \leq Z \leq N t_m$. Sacando el logaritmo obtenemos $\ln t_m \leq \ln Z \leq \ln t_m + \ln N$ y por lo tanto el error que comentemos al quedarnos sólo con el término más grande y tomar logaritmo es a lo sumo $\ln N$, que es despreciable frente a $\ln Z$ (que va como N).

donde \bar{s}_m denota el mínimo absoluto de la energía libre de Landau. Reemplazando este resultado en (5) y usando (7) obtenemos³

$$m = -\frac{\partial f}{\partial h} = \bar{s}_m, \quad (10)$$

es decir, la magnetización es el mínimo absoluto de la energía libre de Landau. A partir de (9) también vemos que la energía libre de Landau evaluada en su mínimo es la energía libre de Helmholtz por partícula,

$$F(T, h) = -\frac{1}{\beta} \ln Z = Nf(T, h, m). \quad (11)$$

Bueno, todo esto es muy bonito pero no nos sirve de nada si no podemos calcular la energía libre de Landau. Y recuerden que estamos considerando un hamiltoniano arbitrario, así que parece haber pocas chances de calcularla. Ah, pero un momento: nosotros estamos interesados en calcular los exponentes críticos, y por lo tanto nos interesa el caso en que h es chico y T está cerca de la temperatura crítica. En ese régimen sabemos que la magnetización va a ser chica, así que para determinarla sólo nos hace falta conocer f para valores chicos de \bar{s} . Ah bueno, entonces podemos expandir en serie de Taylor! Es más, en ausencia de campo magnético a los spines les da igual apuntar hacia arriba o hacia abajo, es decir, el hamiltoniano en ese caso tiene la simetría $H_0(-s_1, \dots, -s_N) = H_0(s_1, \dots, s_N)$. Eso significa que la energía libre de Landau en ausencia de campo magnético es una función par de \bar{s} , $f_0(T, -\bar{s}) = f_0(T, \bar{s})$, y por lo tanto en su serie de Taylor sólo aparecen potencias pares. Quedándonos a cuarto orden obtenemos

$$f_0(T, \bar{s}) = a(T)\bar{s}^2 + b(T)\bar{s}^4, \quad (12)$$

donde a y b son funciones desconocidas de la temperatura (su forma precisa dependerá del hamiltoniano). En principio deberíamos incluir también un término de orden cero en \bar{s} , pero no lo hemos hecho porque ese término es irrelevante para el cálculo de los exponentes críticos. Lo único que vamos a asumir es que b es positivo en todo el rango de temperaturas de interés, porque de lo contrario f_0 no tendría un mínimo absoluto (se haría arbitrariamente negativa para $|\bar{s}|$ grande). Si b fuera negativo, entonces habría que agregar el término de orden 6 a la ecuación (12) para asegurarnos de que f_0 tiene un mínimo absoluto. De (7) y (12) obtenemos la energía libre de Landau en presencia de campo magnético,

$$f(T, h, \bar{s}) = a(T)\bar{s}^2 + b(T)\bar{s}^4 - h\bar{s}. \quad (13)$$

A partir de esta ecuación vamos a determinar todos los exponentes críticos.

Empezamos calculando la magnetización en el caso $h = 0$. En ese caso, los puntos estacionarios de f están dados por

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{s}} = 2\bar{s}(a + 2b\bar{s}^2). \quad (14)$$

³Una sutileza: la derivada respecto a h hay que tomarla a T constante, pero no a \bar{s}_m constante (\bar{s}_m depende de T y h), así que en esta derivada hay un término $(\partial f / \partial \bar{s})_{\bar{s}=\bar{s}_m} (\partial \bar{s}_m / \partial h)$, pero este término es cero precisamente porque \bar{s}_m es un mínimo.

Claramente, una solución de esta ecuación es $\bar{s} = 0$. En el caso $a > 0$, ésta es la única solución, y es necesariamente un mínimo porque $f \rightarrow \infty$ cuando $\bar{s} \rightarrow \pm\infty$, así que

$$m = 0 \quad \text{cuando } a > 0. \quad (15)$$

En el caso $a < 0$ la ecuación tiene dos soluciones más, $\bar{s} = \pm\sqrt{-a/2b}$, y éstos son los mínimos porque son los primeros extremos viniendo desde $\pm\infty$, donde f tiende a ∞ (estamos ignorando la posibilidad de que sean puntos de inflexión); en este caso, la solución $\bar{s} = 0$ es un máximo. Así pues, tenemos

$$m = \pm\sqrt{\frac{-a}{2b}} \quad \text{cuando } a < 0. \quad (16)$$

Ahora, sabemos que m tiene que ser cero para $T > T_c$ y distinto de cero para $T < T_c$. Por lo tanto, de las ecuaciones (15) y (16) vemos que $a(T)$ es positivo para $T > T_c$ y negativo para $T < T_c$. En la siguiente figura representamos f en función de \bar{s} para dos temperaturas, una superior y otra inferior a la crítica.

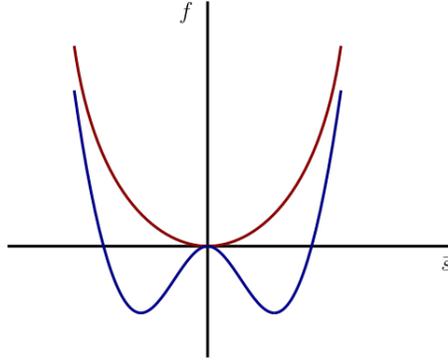


Figura 1: La energía libre de Landau en función del spin promedio para $T > T_c$ (curva roja) y $T < T_c$ (curva azul).

Para temperaturas muy cercanas a la crítica, podemos escribir m en función de T de manera más explícita. Notemos que la condición de que $a(T)$ sea positivo para $T > T_c$ y negativo para $T < T_c$ implica $a(T_c) = 0$, $a'(T_c) > 0$. Por lo tanto, expandiendo a y b alrededor de T_c y quedándonos al orden más bajo obtenemos

$$a(T) \simeq a_0(T - T_c) \quad b(T) \simeq b_0, \quad (17)$$

donde a_0 y b_0 son constantes positivas (recordemos que estamos asumiendo $b > 0$ en todo el rango de temperaturas de interés). Reemplazando en (16) obtenemos

$$m = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \pm\sqrt{\frac{a_0(T_c - T)}{2b_0}} & T < T_c. \end{cases} \quad (18)$$

Nótese que la magnetización es continua a la temperatura crítica pero su derivada no lo es, como corresponde a una transición de fase de segundo orden. Comparando este resultado con la segunda ecuación en (2) obtenemos nuestro primer exponente crítico,

$$\beta = \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Vamos ahora con los demás exponentes. Reemplazando el resultado (18) en (11) obtenemos la energía libre de Helmholtz en ausencia de campo magnético,

$$\frac{F(T)}{N} = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ -\frac{a_0^2}{4b_0}(T - T_c)^2 & T < T_c, \end{cases} \quad (20)$$

y de ahí sacamos el calor específico,

$$c_V = \frac{T}{N} \frac{dS}{dT} = -\frac{T}{N} \frac{d^2F}{dT^2} = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \frac{a_0^2}{2b_0} T & T < T_c. \end{cases} \quad (21)$$

Como vemos, el calor específico no diverge ni tiende a cero cuando $T \rightarrow T_c$. El único valor del exponente crítico α (primera ecuación en (2)) compatible con este comportamiento es

$$\alpha = 0. \quad (22)$$

Para determinar los otros dos exponentes críticos que aparecen en la ecuación (2) necesitamos prender el campo magnético, es decir, volver a la energía libre de Landau (13) con h genérico. El mínimo m de esta energía libre cumple

$$2am + 4bm^3 = h. \quad (23)$$

Ésta es una ecuación cúbica difícil de resolver, pero por suerte no hace falta resolverla para obtener los exponentes críticos que buscamos. En efecto, derivando esta ecuación respecto a h y evaluando en $h = 0$ obtenemos

$$2(a + 6bm^2)\chi = 1, \quad (24)$$

donde m está evaluado en $h = 0$ (y por lo tanto es la magnetización en ausencia de campo magnético, que ya calculamos), y $\chi = \partial m / \partial h|_{h=0}$ es la susceptibilidad. Usando las ecuaciones (17) y (18) vemos entonces que

$$\chi = \frac{1}{2(a + 6bm^2)} = \begin{cases} \frac{1}{2a_0(T - T_c)} & T > T_c \\ \frac{1}{4a_0(T_c - T)} & T < T_c, \end{cases} \quad (25)$$

lo cual, por comparación con la tercera ecuación en (2), implica

$$\gamma = 1. \quad (26)$$

Por último, evaluando la ecuación cúbica (23) en $T = T_c$ el primer término se anula y obtenemos inmediatamente que, a esta temperatura,

$$m = \left(\frac{h}{4b_0} \right)^{1/3}, \quad (27)$$

de manera que, por comparación con la última ecuación en (2),

$$\delta = 3. \quad (28)$$

Para calcular el exponente crítico ν asociado a la longitud de correlación hay que ir un poco más allá de la teoría de Landau. A grandes rasgos, lo que se hace es dividir la red en bloques de volumen v mucho menor que el volumen total, pero suficientemente grande para que el número n de sitios por bloque sea muy grande, y considerar la *densidad local de spin*

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} \sum_i s_i, \quad (29)$$

donde la suma es sobre todos los sitios del bloque centrado en \mathbf{r} . Asumiendo que la función de correlación cambia poco ante pequeñas variaciones de la posición de los dos spines involucrados, se tiene

$$g(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \simeq \left(\frac{v}{n}\right)^2 [\langle \sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}') \rangle - \langle \sigma(\mathbf{r}) \rangle \langle \sigma(\mathbf{r}') \rangle]. \quad (30)$$

Entonces se define un funcional $f(T, \sigma]$ de forma análoga a la energía libre de Landau, es decir, reemplazando en la ecuación (6) el spin promedio \bar{s} (que es un número) por la densidad local σ (que es una función), y se propone una forma para este funcional por argumentos análogos a los que nos llevaron a la ecuación (13). A partir de ahí, uno puede calcular la función de correlación (30), y de ahí extraer la longitud de correlación. El valor que se obtiene para el exponente crítico asociado a esta cantidad es

$$\nu = 1/2. \quad (31)$$

La modificación de la teoría de Landau que acabamos de describir a grandes rasgos se suele denominar *teoría de Landau-Ginzburg*, y la pueden estudiar más en detalle en la sección 5.5 de [estas notas](#) de David Tong. Ahí se recupera el resultado (31) con argumentos medio heurísticos; para encontrar un cálculo más detallado del exponente crítico ν dentro de la teoría de Landau-Ginzburg pueden consultar [estas otras notas](#) del mismo autor, aunque ya les advierto que éstas son de nivel más alto y les van a hacer transpirar un poco.

Como acabamos de ver, la teoría de Landau predice que los exponentes críticos de una red de spines son $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\delta = 3$ y $\nu = 1/2$ sin importar la forma del hamiltoniano. Recuperamos, pues, el fenómeno de la universalidad: todas las redes de spines tienen los mismos exponentes críticos. Ahora bien, en realidad nos estamos pasando, porque no hemos asumido nada sobre la dimensión de la red y por lo tanto los exponentes críticos nos están quedando independientes de la dimensión, lo cual es incorrecto. De hecho, si comparamos nuestros exponentes críticos con los que se derivan de la solución de Onsager para Ising en dos dimensiones vemos que no dan lo mismo. ¿Qué está pasando entonces, dónde nos estamos equivocando? El error está en una sutileza mayúscula. Volvamos a la ecuación (9), donde hemos aproximado la función de

partición, que teníamos expresada como una suma sobre \bar{s} , por el término más grande de esa suma. En la nota al pie 2 hemos explicado por qué podemos hacer esa aproximación: al quedarnos con el término más grande y tomar logaritmo cometemos un error que está entre 0 y $\ln N$, lo cual es despreciable frente a $\ln Z$. Eso está perfecto, pero después vamos a querer tomar derivadas para calcular los observables de interés, y ahí aparecen los problemas. Para verlo, escribamos la función de partición exacta,

$$\ln Z = -\beta N f(T, h, \bar{s}_m) + \Delta(T, h, N) \ln N. \quad (32)$$

No sabemos cuánto vale Δ , pero sí sabemos que está entre 0 y 1, y por lo tanto el segundo término es despreciable frente al primero. Eso está perfecto. Ahora bien, puede ser que las derivadas del segundo término no sean despreciables frente a las derivadas del primero. Para verlo con un ejemplo sencillo, consideren la función $f(x) = 1 + \epsilon \sin(x/\epsilon)$, con $\epsilon \ll 1$. El segundo término es despreciable frente al primero, pero su derivada no, y de hecho es mucho más grande que la del primero. Bueno, nosotros no hemos tenido en cuenta esta sutileza. Y al no tenerla en cuenta hemos llegado al resultado de que la magnetización es el mínimo absoluto de la energía de Landau. Fíjense a partir de la definición (6) que la probabilidad de un valor de \bar{s} es

$$P(\bar{s}) = \frac{1}{Z} \sum_{s_i | \bar{s}} e^{-\beta H(s_1, \dots, s_N)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta N f(T, h, \bar{s})}, \quad (33)$$

así que el resultado que hemos obtenido es que el valor medio de \bar{s} (la magnetización) coincide con el valor más probable de \bar{s} . Eso es correcto cuando la distribución de probabilidad está muy picada en el valor medio, es decir, cuando las fluctuaciones son pequeñas; cuando las fluctuaciones son grandes, en general no es verdad que el valor medio coincida con el valor más probable. Y cuánto valen las fluctuaciones en nuestro caso? Por un argumento análogo al de las ecuaciones (29) y (30) del [repaso teórico de la guía 3](#), la varianza de \bar{s} está relacionada con la susceptibilidad,

$$\Delta \bar{s}^2 = \frac{\chi}{N\beta} \quad (34)$$

La divergencia de χ en el punto crítico (ver las ecuaciones (2) y (26)) sugiere entonces que las fluctuaciones podrían ser importantes en ese punto (de hecho, ustedes mismos vieron en la práctica computacional que \bar{s} fluctúa mucho cerca de la temperatura crítica). Nótese que en (34) hay un N dividiendo, así que es difícil estimar la importancia de las fluctuaciones en el punto crítico (involucran un cociente de cantidades que divergen). Para resolver la indeterminación, vamos a reemplazar N (que es proporcional al volumen) por el volumen asociado a la longitud de correlación, ξ^d , donde d es la dimensión de la red. Usando (2), (19), (26) y (31) tenemos entonces

$$\frac{\Delta \bar{s}^2}{m^2} \sim \frac{\chi}{m^2 \xi^d \beta} \sim |T - T_c|^{-\gamma - 2\beta + d\nu} = |T - T_c|^{(d-4)/2}. \quad (35)$$

Así pues, las fluctuaciones se pueden despreciar para $d > 4$ pero no para $d \leq 4$. En otras palabras, la teoría de Landau es una buena aproximación en dimensión mayor que 4 pero deja de serlo para dimensiones menores, de ahí la discrepancia que encontramos entre nuestros resultados y las observaciones experimentales/resultados exactos. La teoría de Landau, pues, no tiene la última palabra en cuanto al fenómeno de la universalidad. Para entenderlo mejor tendremos que cambiar de estrategia, y eso es lo que hacemos en la próxima sección.

3 Grupo de renormalización

El enfoque que presentamos a continuación se basa en la observación de que, en el punto crítico, la longitud de correlación diverge. Esta observación está sustentada por el experimento, por resultados exactos (como por ejemplo el resultado para la cadena de Ising en una dimensión, que ustedes mismos obtuvieron en la guía anterior) y también por la teoría de Landau-Ginzburg (ver las ecuaciones (3) y (31)). Consideremos una red de spines con un hamiltoniano H cualquiera (al producto βH lo llamaremos el *hamiltoniano reducido* del sistema), y sea ξ su longitud de correlación. Consideremos también una subred \mathcal{S} , y sea l su espaciado (distancia entre primeros vecinos) en unidades del espaciado de la red original. En la siguiente figura mostramos un ejemplo.

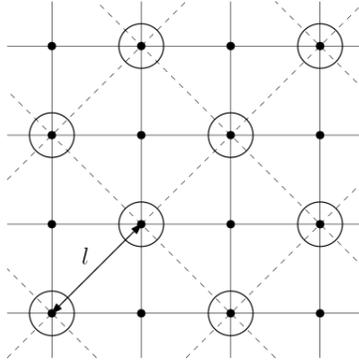


Figura 2: La red bidimensional cuadrada (líneas sólidas) y una subred (líneas punteadas) con $l = \sqrt{2}$. Los sitios de la subred están resaltados con círculos.

La probabilidad de un estado $\{s_i, i \in \mathcal{S}\}$ de la subred se obtiene sumando sobre todos los estados $\{s_j, j \notin \mathcal{S}\}$ de los spines que no están en ella,

$$P(\{s_i, i \in \mathcal{S}\}) = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_j, j \notin \mathcal{S}\}} e^{-\beta H(\{s_i, i \in \mathcal{S}\}, \{s_j, j \notin \mathcal{S}\})}. \quad (36)$$

Podemos definir un hamiltoniano reducido $\beta' H'$ para la subred que reproduzca estas probabilidades,

$$\frac{1}{Z'} e^{-\beta' H'(\{s_i, i \in \mathcal{S}\})} \equiv P(\{s_i, i \in \mathcal{S}\}). \quad (37)$$

Esta construcción recibe el nombre de *decimación*. Ahora, si aplicamos una transformación de escala (*renormalización*) de manera que todas las longitudes se dividan por l , la subred se convierte en una copia de la red original, y por lo tanto podemos pensar en $\beta' H'$ como un nuevo hamiltoniano reducido para la red original. Por construcción, la longitud de correlación asociada a este nuevo hamiltoniano reducido es

$$\xi' = \frac{\xi}{l}, \quad (38)$$

así que $\beta' H'$ está más lejos de la criticalidad que βH , porque tiene una longitud de correlación menor (nótese que $l \geq 1$). Supongamos por simplicidad que no hay campo magnético. En ese caso, el hamiltoniano reducido más general que podemos escribir tiene la forma

$$\beta H(s_1, \dots, s_N) = -K_1 \sum_{\langle ij \rangle_1} s_i s_j - K_2 \sum_{\langle ij \rangle_2} s_i s_j + \dots, \quad (39)$$

donde la primera suma es sobre pares de primeros vecinos y la segunda sobre pares de segundos vecinos (eso es lo que indicamos con la notación $\langle ij \rangle_1$ y $\langle ij \rangle_2$). Los puntos suspensivos incluyen sumas sobre pares de terceros vecinos, cuartos vecinos, etc, y también términos que involucran productos de más de dos spines. Los distintos hamiltonianos reducidos corresponden a distintos valores del vector $\mathbf{K} = (K_1, K_2, \dots)$ (por ejemplo, Ising corresponde a $\mathbf{K} = (K_1, 0, \dots, 0)$). Si \mathbf{K} y \mathbf{K}' son los vectores asociados a βH y $\beta' H'$ respectivamente, las ecuaciones (36) y (37) que definen la relación entre ambos se podrán reescribir en la forma

$$\mathbf{K}' = \mathbf{R}_l(\mathbf{K}). \quad (40)$$

A la función \mathbf{R}_l se la conoce como *transformación del grupo de renormalización*, y el parámetro l recibe el nombre de *factor de escala* de la transformación. La razón para usar la palabra “grupo” es que el conjunto \mathcal{R} de todas estas transformaciones es cerrado bajo composición,

$$\mathbf{R}_{l_1} \circ \mathbf{R}_{l_2} = \mathbf{R}_{l_1 l_2}, \quad (41)$$

pero en realidad no es un grupo porque, salvo en el caso $l = 1$, cuya transformación asociada es la identidad, \mathbf{R}_l no tiene inversa en \mathcal{R} (la inversa debería ser $\mathbf{R}_{1/l}$, pero, salvo en el caso $l = 1$, esta transformación no está en \mathcal{R} porque el factor de escala es siempre mayor o igual a 1). Aplicando la transformación (40) de manera iterativa, obtenemos una sucesión $\mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(2)}, \dots$ de hamiltonianos reducidos, cada uno de los cuales tiene una longitud de correlación menor que el anterior. Esta sucesión dibuja una curva en el espacio de todos los hamiltonianos reducidos (también conocido como el *espacio de parámetros*), tal como mostramos en la siguiente figura.

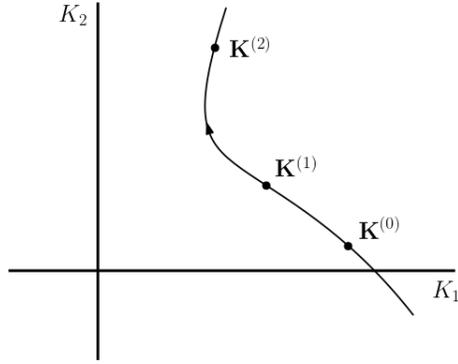


Figura 3: La trayectoria dibujada en el espacio de parámetros (del que sólo mostramos un subespacio bidimensional) por aplicación sucesiva de la transformación (40) a partir de un hamiltoniano reducido inicial $\mathbf{K}^{(0)}$. La longitud de correlación disminuye en el sentido de la flecha.

El conjunto de todas estas trayectorias, obtenidas empezando en puntos distintos del espacio de parámetros, se conoce como el *flujo del grupo de renormalización*. La estructura de este flujo está determinada en buena medida por sus *puntos fijos*, que son los puntos \mathbf{K}_* que cumplen

$$\mathbf{R}_l(\mathbf{K}_*) = \mathbf{K}_*. \quad (42)$$

Para estos puntos tenemos $\mathbf{K}'_* = \mathbf{K}_*$, lo cual, por (38), implica $\xi_*/l = \xi_*$. Esta relación sólo puede darse en dos casos,

$$\xi_* = 0, \infty. \quad (43)$$

En el primer caso no hay correlación entre spines y se dice que el punto fijo es *trivial*; en el segundo, el punto fijo es a la vez un punto crítico. Veamos qué forma tiene la ecuación (40) cerca de un punto fijo. Expandiendo \mathbf{R}_l a primer orden alrededor de \mathbf{K}_* obtenemos

$$\mathbf{R}_l(\mathbf{K}_* + \delta\mathbf{K}) \simeq \mathbf{R}_l(\mathbf{K}_*) + A_l \delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_* + A_l \delta\mathbf{K}, \quad (44)$$

donde A_l es la matriz de componentes $(A_l)_{ij} = \partial(R_l)_i / \partial K_j |_{\mathbf{K}_*}$. Por lo tanto, cerca de un punto fijo la ecuación (40) toma la forma

$$\delta\mathbf{K}' = A_l \delta\mathbf{K}. \quad (45)$$

Asumiendo que A_l es diagonalizable, podemos reescribir esta ecuación en forma más sencilla y explícita. La ecuación (41) implica

$$A_{l_1} A_{l_2} = A_{l_1 l_2}, \quad (46)$$

así que, en particular, A_{l_1} y A_{l_2} conmutan. Matrices diagonalizables que conmutan se pueden diagonalizar a la vez, así que podremos encontrar una base

$\{\mathbf{e}_\sigma\}$ del espacio de parámetros que es propia de A_l para todo l . Si $\lambda_\sigma(l)$ es el autovalor de A_l correspondiente a \mathbf{e}_σ , la ecuación (46) nos dice que

$$\lambda_\sigma(l_1)\lambda_\sigma(l_2) = \lambda_\sigma(l_1l_2), \quad (47)$$

lo cual significa que $\ln \lambda_\sigma$ es una función lineal de $\ln l$ y por lo tanto

$$\lambda_\sigma(l) = l^{y_\sigma}, \quad (48)$$

donde y_σ es una constante. Escribamos ahora $\delta\mathbf{K}$ en la base $\{\mathbf{e}_\sigma\}$,

$$\delta\mathbf{K} = \sum_{\sigma} g_{\sigma} \mathbf{e}_{\sigma}. \quad (49)$$

Las componentes g_{σ} reciben el nombre de *variables de escala* del punto fijo \mathbf{K}_* . En esta base, la ecuación (45) toma una forma más sencilla y explícita,

$$g'_{\sigma} = l^{y_{\sigma}} g_{\sigma}, \quad (50)$$

donde hemos usado (48). Si $y_{\sigma} > 0$, $|g_{\sigma}|$ aumenta al aplicar una transformación del grupo de renormalización y se dice que g_{σ} es una *variable relevante*; si $y_{\sigma} < 0$, $|g_{\sigma}|$ disminuye y se dice que g_{σ} es una *variable irrelevante*; en el caso $y_{\sigma} = 0$, para determinar si $|g_{\sigma}|$ aumenta o disminuye hay que ir más allá del orden lineal al que estamos trabajando y se dice que g_{σ} es una *variable marginal*. Nos vamos a concentrar en puntos fijos que no tienen variables marginales. Alrededor de estos puntos fijos, la estructura del flujo del grupo de renormalización puede ser de tres formas distintas, tal como mostramos en la siguiente figura.

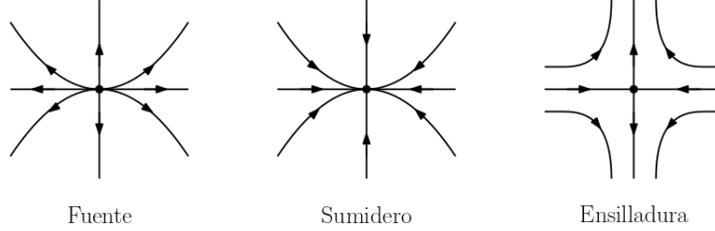


Figura 4: El flujo del grupo de renormalización cerca de un punto fijo. Las direcciones horizontal y vertical corresponden a dos vectores de la base propia de A_l .

El primer caso (fuente) ocurre cuando todas las variables son relevantes; el segundo (sumidero) ocurre cuando todas las variables son irrelevantes; y el tercero (ensilladura) ocurre cuando algunas variables son relevantes y otras irrelevantes. Dado que la longitud de correlación disminuye en el sentido de las flechas, un punto fijo fuente es necesariamente crítico ($\xi_* = \infty$), y un punto fijo sumidero es necesariamente trivial ($\xi_* = 0$); un punto fijo de ensilladura puede ser de cualquiera de los dos tipos. El caso que nos interesa para entender el origen de

la universalidad es el de los puntos fijos de ensilladura que son además puntos críticos. Sea \mathbf{K}_* un punto fijo de este tipo. Dado que la longitud de correlación disminuye en el sentido de las flechas, ésta es necesariamente infinita en todos los puntos de las curvas que fluyen hacia \mathbf{K}_* (en el panel derecho de la figura 4 representamos una de esas curvas, que es la recta horizontal), y por lo tanto estos puntos son críticos. La superficie formada por todos estos puntos críticos, cuya dimensión es igual al número de variables irrelevantes de \mathbf{K}_* , se conoce como la *superficie crítica*. La representamos en la siguiente figura.

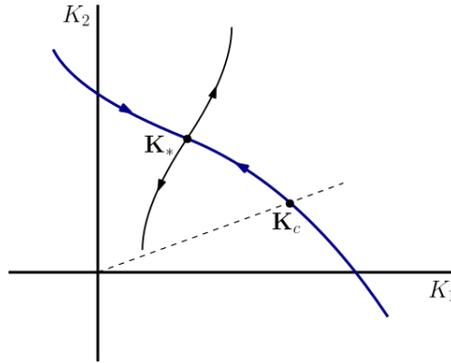


Figura 5: El punto fijo \mathbf{K}_* junto con su superficie crítica (curva azul) y una curva asociada a una dirección relevante. La recta punteada es la trayectoria que describe un sistema al variar su temperatura; el punto donde esta recta se curva con la superficie crítica es el punto crítico de ese sistema.

Nótese que, en general, el flujo del grupo de renormalización no tiene nada que ver con la trayectoria que describe un sistema en el espacio de parámetros cuando simplemente variamos su temperatura. De acuerdo con (39), esta trayectoria está dada por la ecuación $\mathbf{K} = \beta\mathbf{J}$, donde \mathbf{J} es un vector constante que caracteriza el hamiltoniano del sistema, y por lo tanto es una recta que pasa por el origen (la recta punteada de la figura 5 es un ejemplo). El punto donde esta recta se cruza con la superficie crítica es el punto crítico del sistema. Sistemas distintos tienen asociadas rectas distintas y por lo tanto sus puntos críticos también son distintos.

Y ahora sí, ya estamos en condiciones de entender el porqué de la universalidad, es decir, el hecho de que muchos sistemas distintos tengan los mismos exponentes críticos. Nos vamos a concentrar en el exponente crítico ν asociado a la longitud de correlación, pero el argumento para los demás exponentes es similar. Consideremos el punto fijo de la figura 5, y supongamos que tiene una sola variable relevante, digamos g_1 . Consideremos también un sistema en un punto \mathbf{K} del espacio de parámetros cercano a su punto crítico (es decir, a una temperatura cercana a su temperatura crítica), como mostramos en la siguiente figura.

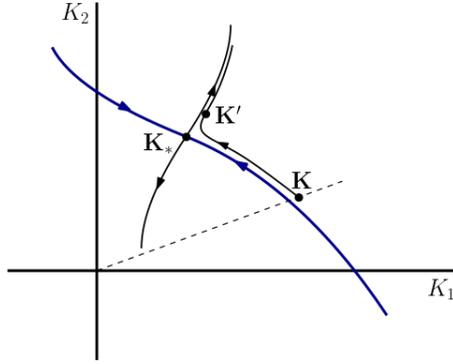


Figura 6: Un sistema (recta punteada) en un punto \mathbf{K} cercano a su punto crítico, y la evolución de este punto de acuerdo con el grupo de renormalización.

Eligiendo un factor de escala l apropiado, después de aplicar una transformación del grupo de renormalización nos plantamos en el punto \mathbf{K}' de la figura, que es cercano al punto fijo y donde todas las variables irrelevantes son aproximadamente cero. Nótese que, si ahora variamos un poco la temperatura de nuestro sistema (es decir, movemos un poco el punto \mathbf{K} sin salirnos de la recta punteada), el mismo factor de escala nos servirá para llegar a otro punto \mathbf{K}' con las mismas propiedades, es decir, podemos asumir que l es independiente de la temperatura. De acuerdo con (38) tenemos

$$\xi = l\xi'. \quad (51)$$

Usando las variables de escala como coordenadas en el espacio de parámetros, podemos escribir $\xi = f(g_1, g_2, \dots)$. Dado que en \mathbf{K}' las variables irrelevantes son aproximadamente cero, tenemos

$$\xi' \simeq f(g'_1, 0, \dots). \quad (52)$$

Ahora, apliquemos una nueva transformación del grupo de renormalización con un nuevo factor de escala l' . Como ahora estamos cerca del punto crítico, la transformación está dada por (50), así que $g''_1 = (l')^{y_1} g'_1$. Además, las variables irrelevantes son aún más cercanas a cero que antes (recordemos que el módulo de una variable irrelevante decrece bajo transformaciones del grupo de renormalización), así que

$$\xi'' \simeq f((l')^{y_1} g'_1, 0, \dots). \quad (53)$$

Teniendo en cuenta que $\xi'' = \xi'/l'$, las ecuaciones (52) y (53) implican

$$f(g'_1, 0, \dots) = l' f((l')^{y_1} g'_1, 0, \dots). \quad (54)$$

Todo el desarrollo que hemos hecho hasta ahora es válido para cualquier valor de l' , así que podemos elegir el valor que más nos convenga. Eligiendo $l' = (g'_1)^{-1/y_1}$ obtenemos

$$f(g'_1, 0, \dots) = a(g'_1)^{-1/y_1}, \quad (55)$$

donde $a = f(1, 0, \dots)$ es una constante, y por lo tanto, por (51) y (52),

$$\xi = la(g'_1)^{-1/y_1}. \quad (56)$$

Ahora fijémos: g'_1 es una función de la temperatura T de nuestro sistema, porque esta temperatura determina la posición del punto \mathbf{K} y ésta, a su vez, determina el valor de \mathbf{K}' (recordemos que l está fijo). Nótese además que $g'_1 = 0$ cuando $T = T_c$, porque en ese caso \mathbf{K} está sobre la superficie crítica y el flujo del grupo de renormalización no nos saca de esa superficie. Por lo tanto, para temperaturas cercanas a la crítica podemos aproximar $g'_1 \simeq b(T - T_c)$, donde b es una constante, y en consecuencia

$$\xi \propto (T - T_c)^{-1/y_1}, \quad (57)$$

donde el factor de proporcionalidad es independiente de la temperatura. Concluimos pues que el exponente crítico asociado a la longitud de correlación es

$$\nu = \frac{1}{y_1}. \quad (58)$$

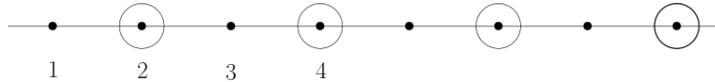
Como vemos, toda la información acerca de nuestro sistema (representado por la curva punteada en la figura 6) se ha perdido: el exponente crítico ν está determinado por y_1 , que es una cantidad asociada al punto fijo. En otras palabras, *todos los sistemas con punto crítico en la superficie crítica de un mismo punto fijo tienen el mismo valor de ν* . Por argumentos similares puede probarse que lo mismo es cierto para los demás exponentes críticos, así que recuperamos el fenómeno de la universalidad, tal como habíamos prometido.

3.1 Ejemplo: Ising en una dimensión

El grupo de renormalización no sirve sólo para entender el origen de la universalidad, sino también para calcular los exponentes críticos. Ahora bien, para hacerlo hay que determinar la forma explícita de la transformación \mathbf{R}_l , encontrar sus puntos fijos y ver cómo es el flujo a su alrededor, y eso es increíblemente complicado. Por suerte, hay un caso sencillo, que es el de Ising en una dimensión. Vamos a ver ese caso. Consideremos una cadena cerrada de Ising formada por N spines, en ausencia de campo magnético. El hamiltoniano reducido es

$$\beta H(s_1, \dots, s_N) = -K \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1}. \quad (59)$$

Supongamos que N es par y fijémos en la subcadena formada por los sitios pares, tal como mostramos en la siguiente figura.



Nótese que $l = 2$ en este caso. Para decimar, conviene que escribamos el hamiltoniano reducido en una forma ligeramente distinta,

$$-\beta H(s_1, \dots, s_N) = -K \sum_{i=1}^{N/2} s_{2i+1}(s_{2i} + s_{2i+2}). \quad (60)$$

En esta suma estamos incluyendo cada par de primeros vecinos exactamente una vez, así que esta ecuación es equivalente a (59). La probabilidad de una configuración s_2, s_4, \dots, s_N de los sitios pares es

$$P(s_2, s_4, \dots, s_N) = \frac{1}{Z} \sum_{s_1, s_3, \dots, s_{N-1}} e^{K \sum_{i=1}^{N/2} s_{2i+1}(s_{2i} + s_{2i+2})}. \quad (61)$$

Podemos pensar en la suma del lado derecho como una función de partición para los spines impares, donde los spines pares juegan el rol de un campo magnético. Esta función de partición claramente factoriza, así que tenemos

$$P(s_2, s_4, \dots, s_N) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{N/2} Z_{2i+1}(s_{2i}, s_{2i+2}), \quad (62)$$

donde $Z_{2i+1}(s_{2i}, s_{2i+2})$ es la función de partición del sitio $2i + 1$. Ésta la calculamos fácilmente,

$$Z_{2i+1}(s_{2i}, s_{2i+2}) = \sum_{s=\pm 1} e^{Ks(s_{2i} + s_{2i+2})} = 2 \cosh[K(s_{2i} + s_{2i+2})]. \quad (63)$$

Definiendo $s'_i \equiv s_{2i}$, tenemos entonces

$$P(s'_1, \dots, s'_{N/2}) = \frac{2^{N/2}}{Z} \prod_{i=1}^{N/2} \cosh[K(s'_i + s'_{i+1})]. \quad (64)$$

Una de las razones por las que el caso de la cadena de Ising es sencillo es que, en este caso, el hamiltoniano reducido $\beta' H'$ también es un hamiltoniano reducido de Ising. Para verlo, propongamos

$$\beta' H'(s'_1, \dots, s'_{N/2}) = -K' \sum_{i=1}^{N/2} s'_i s'_{i+1}, \quad (65)$$

de manera que

$$\frac{1}{Z'} e^{-\beta' H'(s'_1, \dots, s'_{N/2})} = \frac{1}{Z'} \prod_{i=1}^{N/2} e^{K' s'_i s'_{i+1}}. \quad (66)$$

Para que esta cantidad sea igual a la probabilidad (64) basta con que

$$e^{K' s'_i s'_{i+1}} = \alpha \cosh[K(s'_i + s'_{i+1})] \quad (67)$$

para algún α . En efecto, si esto se cumple entonces el lado derecho de (64) es igual al de (66) con $Z' = 2^{-N/2}\alpha Z$. A primera vista, (67) parece un sistema de cuatro ecuaciones (una para cada valor del par (s'_i, s'_{i+1})) con dos incógnitas (K' y α), así que de entrada parecería no tener solución. Pero en realidad son sólo dos ecuaciones, porque las dos ecuaciones con $s'_i = s'_{i+1}$ son la misma, y las otras dos ($s'_i = -s'_{i+1}$) también son idénticas entre sí. Así pues, el sistema tiene solución y por lo tanto el nuevo hamiltoniano reducido efectivamente tiene la forma (65). Las dos ecuaciones independientes ($++$ y $+-$) son

$$e^{K'} = \alpha \cosh(2K) \quad e^{-K'} = \alpha. \quad (68)$$

En realidad no hace falta despejar α , porque este parámetro va a determinar la nueva función de partición Z' , y esta cantidad también la podemos calcular una vez tengamos K' sumando $e^{-\beta' H'}$ sobre todos los estados. Para deshacernos de α , dividimos ambas ecuaciones entre sí y obtenemos

$$e^{2K'} = \cosh(2K). \quad (69)$$

Ésta es la ecuación del grupo de renormalización en este caso. La ecuación toma una forma más sencilla si despejamos de ella $\tanh K'$,

$$\begin{aligned} \tanh K' &= \frac{e^{K'} - e^{-K'}}{e^{K'} + e^{-K'}} = \frac{\sqrt{\cosh(2K)} - 1/\sqrt{\cosh(2K)}}{\sqrt{\cosh(2K)} + 1/\sqrt{\cosh(2K)}} \\ &= \frac{\cosh(2K) - 1}{\cosh(2K) + 1} = \frac{2 \sinh^2 K}{2 \cosh^2 K} = \tanh^2 K. \end{aligned} \quad (70)$$

Así pues, definiendo

$$x = \tanh K \quad (71)$$

la ecuación del grupo de renormalización toma la forma

$$x' = x^2. \quad (72)$$

Los puntos fijos son las soluciones de la ecuación $x^2 = x$, es decir, $x_* = 0, 1$. Si empezamos con $K > 0$ tenemos $x \in (0, 1)$, y es claro a partir de (72) que el flujo del grupo de renormalización nos lleva cada vez a valores más pequeños de x . En la siguiente figura representamos este flujo.



Dado que la longitud de correlación decrece a lo largo del flujo del grupo de renormalización, el punto fijo $x = 0$ es necesariamente trivial ($\xi = 0$) y el punto fijo $x = 1$ es crítico ($\xi = \infty$). Nótese a partir de (71) que $x = 0$ corresponde a $T = \infty$ y $x = 1$ corresponde a $T = 0$, así que estamos recuperando el comportamiento que obtuvimos cuando estudiamos la función de correlación de la cadena de Ising en el problema 5 de la guía 6. Calculemos por último el exponente crítico ν . En general, para hacer eso hay que diagonalizar la matriz de

derivadas de la transformación del grupo de renormalización en los puntos fijos no triviales, pero como en este caso el flujo es unidimensional la matriz también lo es y no hace falta diagonalizar nada. De acuerdo con (72), la transformación del grupo de renormalización es $R_2(x) = x^2$ (recordemos que $l = 2$), de manera que $\lambda_1(2) = R_2'(1) = 2$. Comparando con (48) vemos que $y_1 = 1$, lo cual, por (58), implica $\nu = 1$.