Ej. 10)

miércoles, 5 de mayo de 2021 17:47

Gas ideal fuera del eq: $f(\bar r,\bar p,t) = f_0(\bar r,\bar p,t) + \delta f$

MB local! $\delta f << f_0$

$$f(\bar r,\bar p,t) = \frac{n(\bar r,t)}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-\frac{(\bar p - m\bar u)^2}{2mkT}} + \delta f$$

a) ¿Qué condiciones debe cumplir δf?

$$n(\bar r,t) = \int d^3_p f = \int d^3p\,(f_0+\delta f) = \underbrace{\int d^3_p f_0}_{n(\bar r,t)} + \int d^3_p \delta f$$

$$\Rightarrow \int d^3_p \delta f = 0 \quad (1)$$

$$\bar u(\bar r,t) = \left\langle \frac{\bar p}{m}\right\rangle = \int d^3p \frac{\bar p}{m} f = \underbrace{\int d^3_p \frac{\bar p}{m} f_0}_{\bar u(\bar r,t)} + \int d^3_p \frac{\bar p}{m}\delta f$$

$$\Rightarrow \int d^3p \frac{\bar p}{m}\delta f = 0 \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} m k T = \left\langle \frac{p^2}{2m}\right\rangle = \int d^3_p \frac{p^2}{2m} f = \underbrace{\int d^3_p \frac{p^2}{2m} f_0}_{\frac{3}{2}mkT} + \int d^3_p \frac{p^2}{2m}\delta f$$

$$\Rightarrow \int d^3_p \frac{p^2}{2m}\delta f = 0 \quad (3)$$

b) $\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{col} = -\frac{\delta f}{\tau}$, ← Aprox de tiempo de relajación

En la ec.:
$$\overbrace{\left(\partial_t + \frac{\bar p}{m}\cdot\bar\nabla_r + \bar F\cdot\bar\nabla_{\bar p}\right)}^{D} \underset{f_0+\delta f\ (\delta f << f_0)}{\underbrace{f}} \simeq -\frac{\delta f}{\tau} \Rightarrow \delta f = -\tau D f_0$$

¿Qué significan las condiciones de a)?

$$(1)\quad \int d^3_p \delta f = 0 = \int d^3_p (-\tau D f_0) = -\frac{\tau}{m}\int d^3_p (\bar p\cdot\bar\nabla) f_0$$

$\bar F = 0$: $D f_0 = -\frac{\tau}{m}(\bar p\cdot\bar\nabla) f_0$

$$0 = -\frac{\tau}{m}\int d^3_p\, p_i \partial_i f_0 = -\tau\,\partial_i \underbrace{\int d^3_p \frac{p_i}{m} f_0}_{\nabla\cdot(n\bar u)} = -\tau\,\underbrace{\nabla\cdot(n\bar u)}_{\nabla\cdot(n\bar u)=0\ \text{(ec. continuidad)}}$$

$n(\bar r,\cancel{t})$

$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 0$

$$u_i = \frac{\int d^3p \frac{p_i}{m} f_0}{\int d^3p f_0}$$

Leyes de Conservación:
- $\frac{\partial n}{\partial t} + \bar\nabla\cdot(n\bar u) = 0$
- $\frac{\partial \bar\pi}{\partial t} + \bar\nabla\cdot\bar{\bar\Theta} = 0$

$$\begin{cases} \bar\pi = \int d^3_p \bar p f \\ \Theta_{ij} = \int d^3_p \frac{p_i p_j}{m} f \end{cases}$$

$$(2)\quad \left(\int d^3_p \frac{\bar p}{m}\delta f\right)_i = 0 = \left(\int d^3p \frac{\bar p}{m}\left(\frac{-\tau}{m}(\bar p\cdot\bar\nabla)\right) f_0\right)_i = -\tau\int d^3_p \frac{p_i p_j}{m}\partial_j f_0 =$$

② $\left(\int d^3p \frac{\bar{p}}{m}\,\delta f\right)_i = 0 = \left(\int d^3p \frac{\bar{p}}{m}\left(\frac{-\tau}{m}(\bar{p}\cdot\bar{\nabla})f_0\right)\right)_i = -\tau \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m} \partial_j f_0 =$

$= -\tau\, \partial_j \left(\int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m} f\right) = -\tau \partial_j \Theta_{ij} = 0 \rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{\bar{\Theta}} = 0 \quad (\partial_i \Theta_{ij} = 0)$

$\Theta_{ij} = \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m} f$.

$\cdot\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot\bar{J}_\varepsilon = 0$

③ $\int d^3p\, \frac{p^2}{2m}\,\delta f = 0 = -\frac{\tau}{m}\int \frac{p^2}{2m}(\bar{p}\cdot\bar{\nabla})f_0 \rightsquigarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{J}_\varepsilon = 0$.

$\begin{cases} \varepsilon = \int d^3p\, \frac{p^2}{2m} f \\ \bar{J}_\varepsilon = \int d^3p\, \frac{p^2}{2m}\frac{\bar{p}}{m} f . \end{cases}$

c) Probar que $P_{ij} = \underbrace{nkT\,\delta_{ij}}_{P_{ij}^{(0)}} + 2\eta\left[\frac{1}{3}\bar{\nabla}\cdot\bar{u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$

$\Theta_{ij}^{(0)} = \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m} f_0 = \frac{1}{m}\int d^3p\,(p_i + m u_i)(p_j + m u_j)\tilde{f}_0 = \frac{1}{m}\left[\underbrace{\int d^3p\, p_i p_j \tilde{f}_0}_{2m\cdot\frac{1}{2}nkT\delta_{ij}} + \underbrace{\int d^3p\, m^2 u_i u_j \tilde{f}_0}_{m^2 u_i u_j \underbrace{\int d^3p\,\tilde{f}_0}_{n}}\right]$

CV: $\bar{p} \rightarrow \bar{p} + m\bar{u}$ — Centrada

$\Rightarrow \Theta_{ij} = nkT\,\delta_{ij} + m n u_i u_j$.

$P_{ij}^{(0)} = \int d^3p\, \frac{p_i}{m}(p_j - m u_j) f_0 = nkT\,\delta_{ij} \rightarrow \boxed{P_{ij} = \Theta_{ij} - m n u_i u_j}$

Calculamos $\Theta_{ij}^{(1)} = \int d^3p\, \frac{p_i p_j}{m}\,\delta f = -\frac{\tau}{m^2}\int d^3p\, p_i p_j (\bar{p}\cdot\bar{\nabla}) f_0 = \frac{-\tau}{m^2}\int d^3p\, p_i p_j\, (p_\ell \partial_\ell) f_0$

$\Theta_{ij}^{(1)} \overset{\text{mismo CV}}{=} -\frac{\tau}{m^2}\partial_\ell\left[\int d^3p\,(p_i + m u_i)(p_j + m u_j)(p_\ell + m u_\ell)\tilde{f}_0\right] =$ ← Me fijo qué integrales se van por ser PAR × IMPAR

$= -\frac{\tau}{m^2}\partial_\ell\left[m\underbrace{\int d^3p\, p_i p_j u_\ell f_0}_{u_\ell\, m n kT \delta_{ij}} + m\underbrace{\int d^3p\, p_i p_\ell u_j f_0}_{u_j\, m n kT \delta_{i\ell}} + m\underbrace{\int d^3p\, p_j p_\ell u_i f_0}_{u_i\, m n kT \delta_{j\ell}} + m^3\underbrace{\int d^3p\, u_i u_j u_\ell f_0}_{u_i u_j u_\ell\, n}\right]$

$= -\tau\left[\bar{\nabla}\cdot(nkT\,\bar{u}) + \partial_i(nkT u_j) + \partial_j(nkT u_i) + m\bar{\nabla}\cdot(n u_i u_j \bar{u})\right]$

$\Rightarrow P_{ij} = nkT\,\delta_{ij} - \tau\left[\nabla\cdot(nkT\bar{u}) + \partial_i(nkT u_j) + \partial_j(nkT u_i) + m\bar{\nabla}\cdot(n u_i u_j \bar{u})\right]$

Uso las ecs de Balance: $\nabla\cdot(n\bar{u}) = 0$

(*) $m n(\bar{u}\cdot\nabla)\bar{u} + \nabla(nkT) = 0$ (Balance del impulso).

$P_{ij} = nkT\,\delta_{ij} - \tau n\left[(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})kT\,\delta_{ij} + kT(\partial_i u_j + \partial_j u_i)\right]$

Falta reescribir:

Receta: 1°) $\bar{u}\cdot(*) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}m n(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})u^2 = -n(\bar{u}\cdot\bar{\nabla})kT + nkT\,\bar{\nabla}\cdot\bar{u}$ (**)

2°) De la cons. de energía: $\longrightarrow \bar{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{3}{2}kT + \frac{1}{2}m u^2\right)n\bar{u}\right] = 0$ (Δ)

3°) Metiendo (**) y continuidad en (Δ) $\longrightarrow (\bar{u}\cdot\nabla)kT = -\frac{2}{3}kT(\bar{\nabla}\cdot\bar{u})$

$$P_{ij} = nkT\delta_{ij} - 2\tau nkT\left[-\frac{1}{3}kT(\bar\nabla\cdot\bar u) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

que es lo que queriamos probar. (Huang)

$$\boxed{\eta = \tau nkT}$$ ← La viscosidad que encontramos en la teórica.

d) Gas en reposo $(\bar u = 0)$ y $\bar F = 0$, pvq $\bar q = -\alpha\nabla T + \mathcal{O}(\tau^2)$

$$\bar q = \int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\cdot\frac{\bar p}{m}f = \underbrace{\int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\frac{\bar p}{m}f_0}_{=0\ (\text{PAR}\times\text{IMPAR})} + \int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\frac{\bar p}{m}\delta f.$$

$$q_i = \int d^3p\,\frac{p^2}{2m}\frac{p_i}{m}\left(-\frac{\tau}{m}(\bar p\cdot\bar\nabla)f_0\right) = \frac{-\tau}{2m^3}\int d^3p\,p^2 p_i p_j \partial_j f_0 = \frac{-\tau}{2m^3}\partial_j\Big[\underbrace{\int d^3p\,p^2 p_i p_j f_0}_{5n(mkT)^2\delta_{ij}}\Big]$$

$$= -\frac{5}{2}\frac{\tau}{m^3}\partial_j\left(n m^2 k^2 T^2\delta_{ij}\right) = -\frac{5}{2}\frac{\tau}{m}\partial_i\left(nk^2T^2\right)$$

De $\bar\nabla\cdot\bar{\bar\theta} = 0 = \partial_i\theta_{ij} = \partial_i(nkT\delta_{ij}) \Rightarrow \partial_i(nkT) = 0 = k\,\partial_i(nT) = 0 \rightarrow \nabla\cdot(nT) = 0$

$$\partial_i(nT^2) = T\underbrace{\partial_i(nT)}_{=0} + nT\partial_i T = nT\partial_i T = nT\nabla T$$

$$\Rightarrow \bar q = -\frac{5}{2}\frac{\tau}{m}k^2 nT\,\nabla T \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{2}\frac{\tau k^2 nT}{m}}$$

e) $P_r = \dfrac{C_p\,\eta}{\alpha} = 1$ ← ¿Que mide Pr? $P_r = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{\text{Viscosidad Cinemática}}{\text{difusividad térmica}}$

Viscosidad: η

asoc. difusion por calor: α

$C_p = \dfrac{5k}{2m}$

· $P_r|_{exp} \approx 2/3 \neq 1$ ← la aprox de tiempo de relajación es fuerte.

Ej. de parcial (1°C 2019)

miércoles, 5 de mayo de 2021 18:09

1. Un gas ideal monoatómico, compuesto por partículas de masa m, está encerrado en un recipiente de volumen V. El gas está en reposo y en equilibrio térmico. El recipiente está aislado térmicamente. En $t = 0$, se abre un pequeño orificio de área A en la pared del recipiente y empieza un proceso de efusión. La presión exterior es nula. En todo momento se asume que el gas dentro del recipiente está en equilibrio térmico y en reposo, aunque su densidad, energía y temperatura varían lentamente con el tiempo. Recordar que para un gas ideal monoatómico en reposo, la temperatura se define a través de la energía según la relación $E = \frac{3}{2}NkT$.

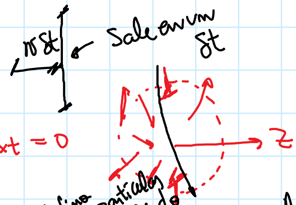
   a) Si la temperatura es T y el número de partículas dentro del recipiente es N, calcular $\dot{N}/N$. (Cuidado con el signo. Chequear las unidades).
   b) Bajo las mismas condiciones, calcular $\dot{E}/E$, donde E es la energía del gas en el recipiente. Mostrar que $\dot{E}/E = \alpha\dot{N}/N$. Dar el valor de la constante α.
   c) Mostrar que $\dot{T}/T = \gamma\dot{N}/N$. Dar el valor de la constante γ.
   d) La temperatura del gas en el recipiente ¿aumenta o disminuye?
   e) Calcular $T(t)$. Inicialmente $T(0) = T_0$.

Fórmulas útiles:

$$f_0(p) = \frac{n e^{-\beta p^2/2m}}{(2\pi m k T)^{3/2}}, \qquad \underbrace{\int_0^\infty dx\, x^3 e^{-x^2} = \frac{1}{2}}, \qquad \int_0^\infty dx\, x^5 e^{-x^2} = 1.$$

T= cte

Pext = 0



$$\left(J_x = \int d^3p\, x \frac{\bar{p}}{m} f \right)$$

Lo defino como partículas que pierdo

A es muy chico

a) $\frac{\dot{N}}{N} = ?$ $\qquad \dot{N} = \frac{\delta N}{dt} = -\int \bar{J}\cdot d\bar{S} \simeq \bar{J}\cdot\hat{n} A$

Corriente de partículas $\qquad \bar{p}\cdot\hat{z} = |p|\cos\theta_p$

$$\dot{N} = \int \underbrace{d^3p}_{\text{No es en todo el espacio}} \frac{\bar{p}}{m}\cdot\hat{n}\, f_0 = \int_0^{2\pi} d\varphi_p \int_0^{\pi/2} d\theta_p \operatorname{sen}\theta_p \int_0^\infty dp\, p^2 \frac{\overbrace{(\bar{p}\cdot\hat{n})}^{\shortparallel}}{m} f_0$$

$$\Rightarrow \dot{N} = 2\pi A \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta_p \operatorname{sen}\theta_p \cos\theta_p}_{\text{CV: } x = \cos\theta_p} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{m} f_0 = 2\pi A \underbrace{\int_0^1 d(\cos\theta_p)\cos\theta_p}_{1/2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{m} f_0 = \frac{\pi}{m} A \int_0^\infty dp\, p^2 \frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-p^2/2mkT}$$

$$= \frac{n}{m\sqrt{\pi}} A \sqrt{2mkT} \underbrace{\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}}_{\overset{\shortparallel}{1/2}} \Rightarrow \frac{\dot{N}}{N} = -\frac{n}{N} A \sqrt{\frac{kT}{2m\pi}} = -\frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2m\pi}}$$

CV: $x = \frac{p}{\sqrt{2mkT}}$ $\qquad n = \frac{N}{V}$

$$\boxed{\frac{\dot{N}}{N} = -\frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2m\pi}}}$$

b) $\frac{\dot{E}}{E} = ?$

$$\dot{E} = \frac{\delta E}{dt} \simeq -J_E\cdot\hat{n} A = -\left(\int d^3p \frac{\bar{p}}{m}\frac{p^2}{2m} f_0\right)\cdot \underset{\overset{\shortparallel}{\hat{z}}}{\hat{n}} A = -\frac{An}{2m^2\sqrt{\pi}}(2mkT)^{3/2} \underbrace{\int x^5 e^{-x^2} dx}_{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{E}}{E} = -\frac{2A\overset{n}{\frac{N}{V}} kT\sqrt{\frac{kT}{2m\pi}}}{\frac{3}{2}NkT} = -\frac{4}{3}\frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2m\pi}} \Rightarrow \boxed{\frac{\dot{E}}{E} = \frac{4}{3}\frac{\dot{N}}{N}}$$

$\rightarrow$ Pierdo partículas $\Rightarrow$ Baja la energía

c) $\frac{\dot{T}}{T} = ?$

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}NkT\right) = \frac{3}{2}k(\dot{N}T + N\dot{T}) \Rightarrow \frac{\dot{E}}{E} = \frac{\frac{3}{2}k(\dot{N}T + N\dot{T})}{\frac{3}{2}NkT} = \frac{\dot{N}}{N} + \frac{\dot{T}}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = \frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{4}{3}\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{N}}{N} \Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{3}\frac{\dot{N}}{N}$$

La temperatura disminuye

e) tengo $\frac{\dot{T}}{T} \rightarrow$ integro : $\qquad T(t) = \frac{T_0}{(1+\nu t)^2}$ $\quad$ con $\nu = \frac{1}{6}\frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT_0}{2m\pi}}$