Teorema de equipartición

Para un sistema clásico, formado por partículas distinguibles (o indistinguibles en la aproximación de Boltzmann), cada grado de libertad que entra cuadráticamente en el hamiltoniano contribuye en $kT/2$ a la energía.

Demostración. Escribamos $\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$, donde $\vec{q}$ y $\vec{p}$ son respectivamente los vectores que dan todas las posiciones y todos los momentos de las partículas que forman el sistema. Supongamos que una de estas $6N$ coordenadas de espacio de fases, digamos x_1, entra cuadráticamente en el hamiltoniano,

$$H(\vec{x}) = \alpha x_1^2 + H'(\vec{x}'),$$

donde $\vec{x}'$ es el vector formado por las restantes $6N-1$ componentes de $\vec{x}$. Entonces la función de partición es

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{d^{6N}x}{h^{3N}} e^{-\beta H(\vec{x})} = \int dx_1 \frac{d^{6N-1}x'}{h^{3N}} e^{-\beta\alpha x_1^2} e^{-\beta H'(\vec{x}')} \\ &= \left(\int dx_1 e^{-\beta\alpha x_1^2} \right) Z' = \sqrt{\frac{\pi}{\beta\alpha}} Z', \end{aligned}$$

donde Z' es la función de partición de los grados de libertad descriptos por $\vec{x}'$. La energía del sistema es entonces

$$E = -\partial_\beta \log Z = -\partial_\beta \log \sqrt{\frac{\pi}{\beta\alpha}} - \partial_\beta \log Z' = \frac{kT}{2} + E',$$

como queríamos demostrar. Acá hemos supuesto que las partículas eran distinguibles, pero si son indistinguibles y usamos la aproximación de Boltzmann no cambia nada, simplemente hay que poner un $1/N!$ delante de Z.