

$\{A, B, C, D\}$ 

\* Permutaciones: formas de ordenar los elementos de un conjunto

ABCD

BACD

# permutaciones de un conjunto de  $n$  elementos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

\* k-permutaciones: listas ordenadas de  $k$  elementos extraídos de un conjunto.

ABC

BAC

BDA

# k-permutaciones de un conjunto de  $n \geq k$  elementos:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

\* Combinaciones: subconjuntos.

{A, B, C}

{A, B, D}

# combinaciones de k elementos de un conjunto de n elementos:

k-perm  $\rightarrow$   $\frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$

1. ¿De cuántas formas se pueden ordenar 5 personas en hilera para sacarse una foto? ¿De cuántas formas si  $A$  y  $B$  deben estar uno al lado del otro?  $2 \cdot 4!$
2. ¿Cuántas palabras de 3 letras (tengan o no sentido) se pueden formar con las letras a, b, c, d, e y f? ¿Y si no se pueden repetir letras?  $6 \cdot 5 \cdot 4 = 6!/3!$
3. Se llama anagrama de una palabra a toda permutación de sus letras, tenga o no sentido. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra MANZANA?
4. Para un torneo de ping pong se anotaron 6 personas. ¿Cuántos partidos se van a jugar si todos tienen que jugar entre sí?

5!

(AB) CDE

(BA) CDE

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$

$$\frac{7!}{2!3!}$$

MAN<sub>1</sub>ZAN<sub>2</sub>A

MAN<sub>2</sub>ZAN<sub>1</sub>A

AMN<sub>1</sub>ZAN<sub>2</sub>A

AMN<sub>2</sub>ZAN<sub>1</sub>A

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

5. ¿Cuántas maneras hay de amontonar  $N$  libros indistinguibles en  $M$  cajas distinguibles? ¿Cómo cambia el resultado si los libros son distinguibles e importa el orden en que se amontonan en cada caja? ¿Y si no importa ese orden?



$N$  bolitas,  $M-1$  palitos

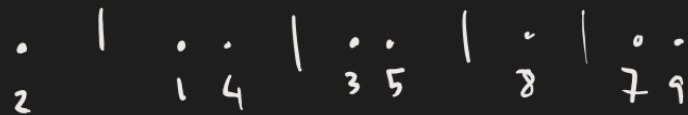


$$\Omega = \frac{(N+M-1)!}{N! (M-1)!} = \binom{N+M-1}{N}$$



Libros distinguibles, importa orden en q se amontona

$$\Omega_{\text{dist}} = N! \Omega_{\text{ind}} = \frac{(N+M-1)!}{(M-1)!}$$



Libros distinguibles, no importa orden dentro de caja

$$\Omega_{\text{dist}} = M \cdot M \dots \cdot M = M^N$$



Si  $M \gg N$ ,

$$\Omega_{ind} = \frac{(N+M-1)!}{N! (M-1)!} = \frac{\overbrace{(N+M-1) \cdot (N+M-2) \cdot \dots \cdot M}^{N \text{ factores}}}{N!}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ M \gg N}}{\approx} \frac{M^N}{N!} = \underbrace{\Omega_{dist}}_{N!}$$

6. Se arrojan  $N$  monedas. Determine el número de secuencias en las que

- (a) aparecen exactamente  $n$  caras;
- (b) no hay dos caras seguidas;
- (c) aparecen dos caras seguidas recién en los últimos dos tiros;
- (d) el número de caras es par.

X X C X C C X

(a) C C C X X X X

C C X X C X X

$$S = \binom{N}{n} \quad \# \text{ formas en q puedo elegir donde aparecen las caras}$$

=

$$S = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

(b) X X C X C X X

X X C X C X C

~~X C C X C X C~~

~~x c c x c x c~~

$$S_N = S_N^c + S_N^x$$

↑                      ↑  
Terminan            Terminan  
en c                    en x

$$S_N^x = S_{N-1} \qquad S_N^c = S_{N-1}^x = S_{N-2}$$

~~x~~ x x x  
x x c x  
x c x x  
c x c x  
c x x x

$$\Rightarrow S_N = S_{N-1} + S_{N-2}$$

$$S_1 = 2$$

↑  
x  
c

$$S_2 = 3$$

↑  
x x  
x c  
c x  
~~c c~~

Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, ...

↑



$$\Rightarrow S_N = F_{N+2}$$

Wiki:  $F_N = \frac{\varphi^N - (-\varphi)^{-N}}{2\varphi - 1}$ ,  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  # de oro

$$\Rightarrow S_N = \frac{\varphi^{N+2} - (-\varphi)^{-(N+2)}}{2\varphi - 1}$$