Guía 2, clase 3

Monday, 12 April 2021 19:16

16. La entropía de una distribución de probabilidad p se define como

$$S(p) = -\sum_{r=1}^{M} p_r \log p_r,$$

donde p_r es la probabilidad del resultado r y M es el número de resultados posibles. La entropía se interpreta como una medida del grado de incertidumbre asociado a p. Confirme esta interpretación mostrando que S es mínima cuando un resultado ocurre con probabilidad 1, y máxima cuando todos los resultados ocurren con igual probabilidad, $p_r = 1/M$.

Sugerencia: para lo segundo, conviene empezar graficando $x \log x$ en el intervalo $[0, 1]$ y usar la llamada desigualdad de Jensen, de teoría de funciones convexas: si Φ es continua y convexa, entonces

$$\Phi\left(\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} a_r\right) \leq \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} \Phi(a_r).$$

$$S(p) = -\sum_{m \in M} p_m \log p_m$$

$$\shortparallel$$

$$S(\{p_m\})$$

$$S \geq 0$$

Certeza total: $p_{\bar{m}} = 1, \quad p_m = 0 \quad m \neq \bar{m}$

$$\left.\begin{aligned} p_{\bar{m}} \log p_{\bar{m}} &= 1 \log 1 = 0 \\ p_m \log p_m &= 0 \log 0 = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \epsilon}{1/\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{1}{\epsilon}}{-1/\epsilon^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = 0$$

Máximo de S? Mult. Lagrange:

$$F(p;\lambda) \equiv S(p) - \lambda\left(\sum_m p_m - 1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \sum_m p_m = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_m} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial p_m}}_{\shortparallel} - \lambda = -\log p_m - 1 - \lambda = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial p_m}\sum_n p_n \log p_n = -\frac{\partial}{\partial p_m}\left(p_m \log p_m\right) = -\log p_m - 1$$

$$\Rightarrow \log p_m = -1-\lambda \Rightarrow p_m = e^{-1-\lambda}$$

$$1 = \sum_m p_m = e^{-1-\lambda}\,|M| \Rightarrow e^{-1-\lambda} = \frac{1}{|M|}$$

$$S(p) = -\sum_m \frac{1}{|M|}\log\frac{1}{|M|} = -\log\frac{1}{|M|} = \log|M|$$

$$\Rightarrow \boxed{p_m = \frac{1}{|M|}}$$

Máxima incertidumbre!

Comprobemos q es máximo: $\log x \le x-1$

q distribución cualquiera

$$S(q) - S(p) = -\sum_m q_m \log q_m - \log|M|$$

$$= \sum_m q_m \log\frac{1}{q_m} + \underbrace{\log\frac{1}{|M|}}_{=\sum_m q_m \log\frac{1}{|M|}}$$

$$= \sum_m q_m \log\frac{1}{|M|q_m} \le \sum_m \frac{1}{|M|} - \sum_m q_m = 0$$

$$\underbrace{\qquad}_{\leq \frac{1}{|M|\, q_m} - 1} \qquad \underbrace{\qquad}_{= 1} \qquad \underbrace{\qquad}_{= 1}$$

$$\Rightarrow \quad S(q) \leq S(p) \quad \Rightarrow \quad p \text{ es efectivamente máximo.}$$

<u>Información</u> de un resultado m $\qquad I_m \equiv -\log p_m$

$$p : M \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad p = \{p_m\} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$$

19. Se observa que en un dado cargado el número 6 sale el doble de veces que el número 1. ~~No se observa nada raro para las otras caras.~~ ¿Cuáles son las probabilidades p_m $(1 \leq m \leq 6)$ que maximizan la entropía?

$$p_6 = 2 p_1$$

$$F(p;\lambda,\mu) = S(p) - \lambda\left(\sum_m p_m - 1\right) - \mu\left(p_6 - 2p_1\right)$$

$\underline{m=1}$:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = -\log p_1 - 1 - \lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \log p_1 = -1-\lambda+2\mu$$

$$\Rightarrow p_1 = e^{-1-\lambda+2\mu}$$

$\underline{2 \le m \le 5}$

$$\frac{\partial F}{\partial p_m} = -\log p_m - 1 - \lambda = 0 \Rightarrow p_m = e^{-1-\lambda}$$

$\underline{m=6}$

$$\frac{\partial F}{\partial p_6} = -\log p_6 - 1 - \lambda - \mu = 0 \implies p_6 = e^{-1-\lambda-\mu}$$

$$2 = \frac{p_6}{p_1} = e^{-3\mu} \implies e^{-\mu} = 2^{1/3}$$

$$p_1 = 2^{-2/3} e^{-1-\lambda}$$

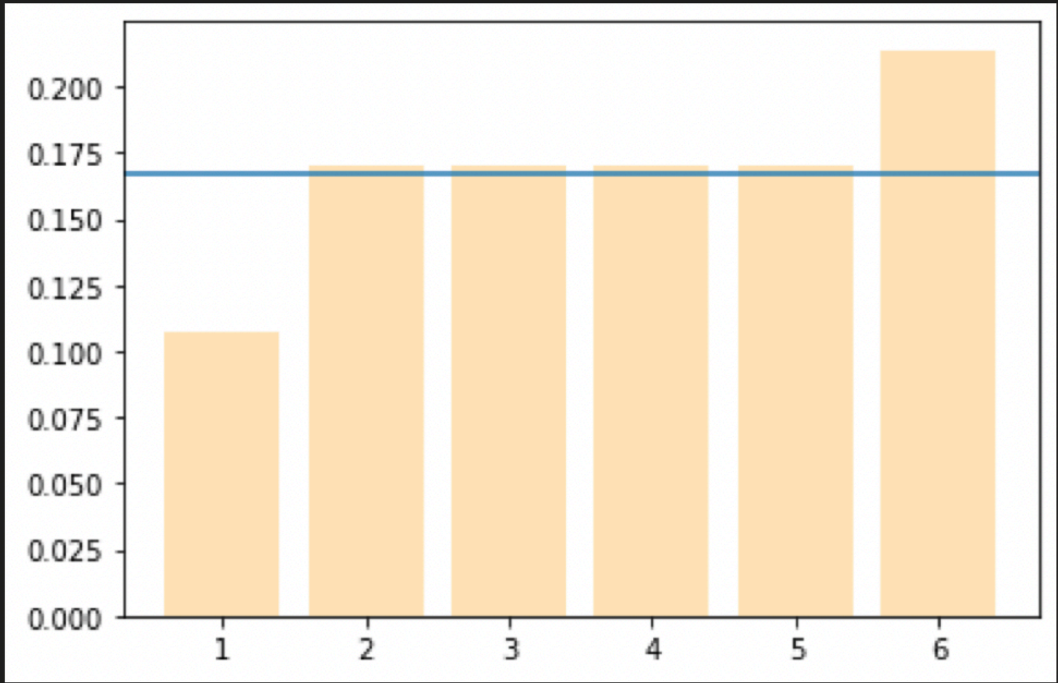
$$\implies \quad p_m = e^{-1-\lambda} \qquad 2 \le m \le 5$$

$$p_6 = 2^{1/3} e^{-1-\lambda}$$

$$1 = \sum_m p_m = e^{-1-\lambda} \left(2^{-2/3} + 4 + 2^{1/3} \right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{-1-\lambda} = \frac{1}{2^{-2/3} + 4 + 2^{1/3}}$$

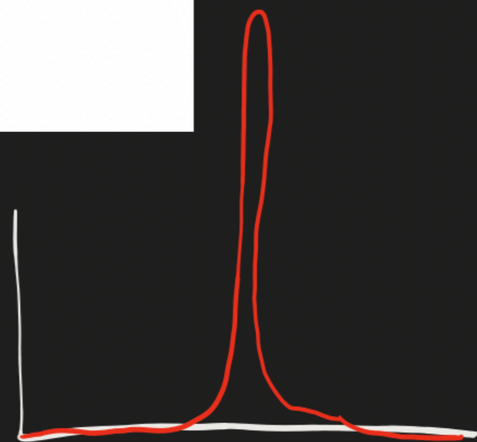
$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} P_1 &= \frac{2^{-2/3}}{2^{-2/3} + 4 + 2^{1/3}} \\ P_m &= \frac{1}{2^{-2/3} + 4 + 2^{1/3}} \qquad 2 \le m \le 5 \\ P_6 &= \frac{2^{1/3}}{2^{-2/3} + 4 + 2^{1/3}} \end{aligned}}$$



18. Usando multiplicadores de Lagrange, encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que maximiza la entropía si se conoce

   (a) $\langle x \rangle = \mu$;
   (b) $\langle x \rangle = \mu$, $\langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2$.

$$S[f] = - \int dx \, f(x) \log f(x)$$



(a) $F[f;\lambda,\xi) = S[f] - \lambda\left(\int dx\, f(x) - 1\right) - \xi\left(\int dx\, x f(x) - \mu\right)$

$$\delta F = \underbrace{\delta S}_{\displaystyle -\delta\int dx\, f(x)\log f(x)} - \lambda\int dx\, \delta f(x) - \xi\int dx\, x\,\delta f(x)$$

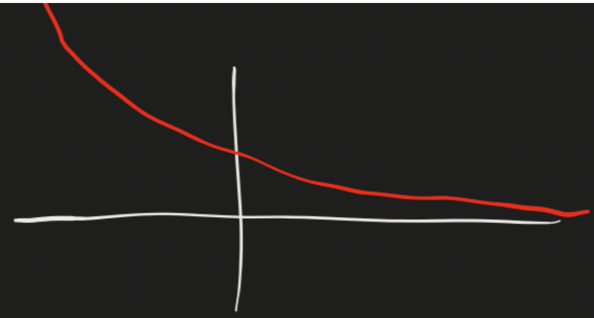
$$-\delta\int dx\, f(x)\log f(x) = -\int dx\, \delta[f(x)\log f(x)]$$

$$= -\int dx\left[\delta f(x)\log f(x) + \delta f(x)\right]$$

$$= -\int dx\, \delta f(x)\left[\log f(x) + 1 + \lambda + \xi x\right] = 0 \quad \forall\, \delta f$$

$$\Rightarrow \log f(x) = -1 - \lambda - \xi x$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \underbrace{e^{-1-\lambda}}_{=\,\alpha} \, e^{-\xi x}$$



$$1 = \int_0^\infty dx \, f(x) = \alpha \int_0^\infty dx \, e^{-\xi x} = \frac{\alpha}{\xi} \Rightarrow \alpha = \xi$$

$\uparrow$

Sup. $x \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \xi \, e^{-\xi x}$$

$$\langle x \rangle = \mu \quad \xrightarrow[\text{Uds.}]{} \quad \xi = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}}$$

Experimento con espacio muestral M

n funciones $A_1, \ldots, A_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\langle A_k \rangle = \sum_m A_{km} p_m$$

Cuál es la distribución q maximize S sujeta a

$$\langle A_k \rangle = a_k$$

$$F(p; \lambda_0, \ldots, \lambda_n) = S(p) - \lambda_0 \left(\sum_m p_m - 1 \right) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(\underbrace{\langle A_k \rangle}_{= \sum_m A_{km} p_m} - a_k \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_m} = -\log p_m - 1 - \lambda_0 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{km} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p_m = \frac{1}{Z} e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{km}}}$$

$e^{1+\lambda_0}$

$$1 = \sum_m p_m = \frac{1}{Z} \sum_m e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{km}}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \sum_m e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{km}}}$$

FUNCIÓN DE PARTICIÓN

$$\langle A_k \rangle = \sum_m A_{km} p_m = \frac{1}{Z} \sum_m \underbrace{A_{km} e^{-\sum_{l=1}^{n} \lambda_l A_{lm}}}_{= -\frac{\partial}{\partial \lambda_k} e^{-\sum_{l=1}^{n} \lambda_l A_{lm}}}$$

$$= -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\underbrace{\sum_m e^{-\sum_{l=1}^{n}\lambda_l A_{lm}}}_{= Z}$$

$$= -\frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\lambda_k} Z = \boxed{-\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\log Z = \langle A_k\rangle} = a_k$$

n ecs para n incógnitas (los λ')

Cuánto vale la S de esta distribución?

$$S = -\sum_m p_m \underbrace{\log p_m}_{= -\sum_{k=1}^{n}\lambda_k A_{km}} = \underbrace{\sum_m p_m \log Z}_{= \log Z} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underbrace{\sum_m p_m A_{km}}_{= \langle A_k\rangle}$$

$$= \log \frac{e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{km}}}{Z}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{km} - \log Z$$

$\log Z$

$\langle A_k \rangle = a_k$

$$\Rightarrow \boxed{S = \log Z + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k}$$

$= S(a_1, \ldots, a_n)$

Transf. de Legendre de $\log Z$!

$$dS = \underbrace{d \log Z}_{= -\cancel{\sum_{k=1}^{n} a_k d\lambda_k}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k \, da_k + \cancel{a_k \, d\lambda_k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, da_k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial S}{\partial a_k} = \lambda_k}$$